	W-GY12, Mathematik - LK Probeklausur (Teil B) für die Klausur am 15.12.2021	Datum: 10.12.2021

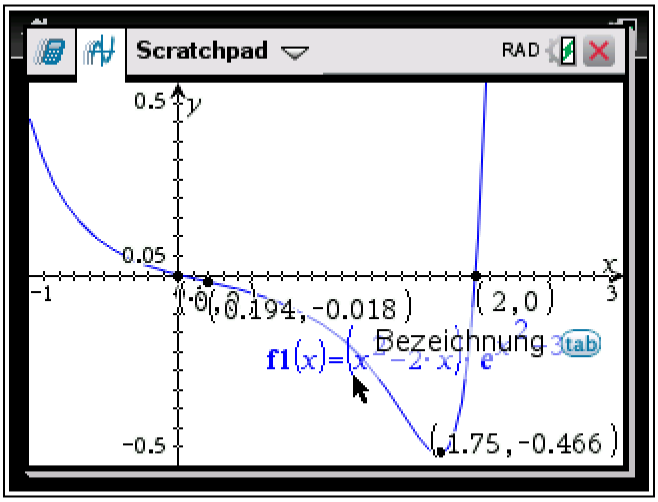
<u>Kurvendiskussion</u>

Führen Sie für $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{x^2 - 3}$ mit $x \in \mathbb{R}$ eine Kurvendiskussion durch.

a) <u>Bestimmen</u> Sie den y-Abschnitt und die Nullstellen.
b) <u>Berechnen</u> Sie die Extrempunkte.
c) <u>Ermitteln</u> Sie die Wendepunkte.
d) <u>Analysieren</u> Sie das Verhalten der Funktionsgraphen im Unendlichen.
e <u>Skizzieren</u> Sie den Graphen von f(x).

Lösungen:

a) y-Abschnitt f(0) = 0 und Nullstellen x = 0 und x = 2
b) TP (1,75 / -0,466)
c) WP (0,194 / -0,018)
d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \wedge \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

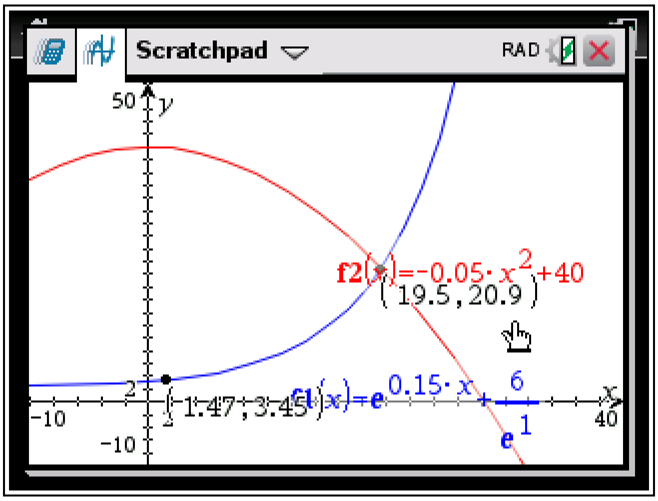
e) 

<u>Angebot und Nachfrage</u>

Eine Marktanalyse liefert für die Modellierung von Angebot und Nachfrage eines Produktes folgende Funktionen $\mathbf{p_1(x) = e^{0,15x} + 6/e}$ und $\mathbf{p_2(x) = -0,05x^2 + 40}$.

a) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktionen für $x \in [0;40]$
b) Berechnen Sie das Marktgleichgewicht.
c) Bestimmen Sie die Preisbereiche mit einem Angebots- und Nachfrageüberhang.
d) Ermitteln Sie die Überhänge bei einem Preis von 10 GE/ME und einem Preis von 25 GE/ME und begründen Sie, ob es sich um Angebots- oder Nachfrageüberhänge handelt.

Lösungen:



a)

b) Marktgleichgewicht (19,53 / 20,93)

c) Mindestpreis: y-Abschnitt von $p_1(x)$: $p_1(0)=3,21$ und
Höchstpreis: y-Abschnitt von $p_2(x)$: $p_2(0)=40$
⇨ Angebotsüberhang bei Preisen zwischen 20,93 GE/ME und 40 GE/ME
⇨ Nachfrageüberhang bei Preisen zwischen 3,21 GE/ME und 20,93 ME

d) $p_1(x) = 10 \Leftrightarrow x = 13,69$ und $p_2(x) = 10 \Leftrightarrow x = 24,49$
=> Nachfrageüberhang von 10,80 ME, da die nachgefragte Menge größer ist als die angebotene.

$p_1(x) = 25 \Leftrightarrow x = 20,84$ und $p_2(x) = 25 \Leftrightarrow x = 17,32$
=> Angebotsüberhang von 3,52 ME, da die angebotene Menge größer ist als die nachgefragte.

Produktlebenszyklus

Der Vertriebsleiter geht davon aus, dass sich die Entwicklung der Absatzzahlen eines Produktes durch die Funktion f mit $f(x) = -14x^4 + 335x^3 - 1\,985x^2 + 17\,050x$ (x Zeit in Monaten, f(x) zugehörige monatliche Absatzzahlen in Stück) beschreiben lässt.

Er vertritt die Auffassung, dass der Verlauf der Absatzzahlen einem Produktlebenszyklus mit den folgenden Phasen entspricht:

Phase	Einführung	Wachstum	Reife	Sättigung	Degeneration
Absatz	degressiv steigend	progressiv steigend	degressiv steigend	langsam fallend	stark fallend

a) Untersuchen Sie die Länge des Produktlebenszyklus.

b) Bestimmen Sie die Länge der Wachstumsphase.

c) Der Vertriebsleiter prognostiziert eine Reifephase von mindestens 5 Monaten. Prüfen Sie, ob diese Prognose von der Modellfunktion f(x) unterstützt wird oder nicht.

d) Der Vertriebsleiter behauptet, dass sich das Produkt 13 Monate nach Markteinführung (x = 13) bereits in der Sättigungs- oder Degenerationsphase befindet. Begründen oder widerlegen Sie die Aussage des Vertriebsleiters.

e) Die Betriebsleitung plant das Produkt vom Markt zu nehmen, wenn die Absatzmenge auf 25 % der maximalen Absatzmenge gesunken ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

Lösungen:

a) Nullstelle von f(x): x = 19,88 => Der PLZ hat eine Länge von etwa 20 Monaten.

b) WP_1 (2,5/34852,73 und WP_2(9,47/155326)
   ⇨ Die Wachstumsphase hat eine Länge von ca. 7 Monaten (9,47 – 2,5 = 6,97).

c) HP (14,51/232297,45)
   ⇨ Die Reifephase hat eine Länge von mehr als 5 Monaten (14,51 – 9,47 = 5,04).

d) f'(13) = 12253 > 0 => Nach 13 Monaten ist das Produkt noch in der Reifephase (da die Steigung positiv ist). Alternative Begründung: Der HP wird nach 14,5 Monaten erreicht, dann beginnt die Sättigungs- oder Degenerationsphase.

e) 232297,45 · 25 / 100 = 58074,36
   Mit solve-Befehl: f(x) = 58074,36 ⇔ x=4,27 ∧ x = 19,27.
   Das Produkt müsste kurz vor dem Ende des PLZ vom Markt genommen werden.

	W-GY12, Mathematik - LK Probeklausur (Teil B) für die Klausur am 15.12.2021	Datum: 10.12.2021

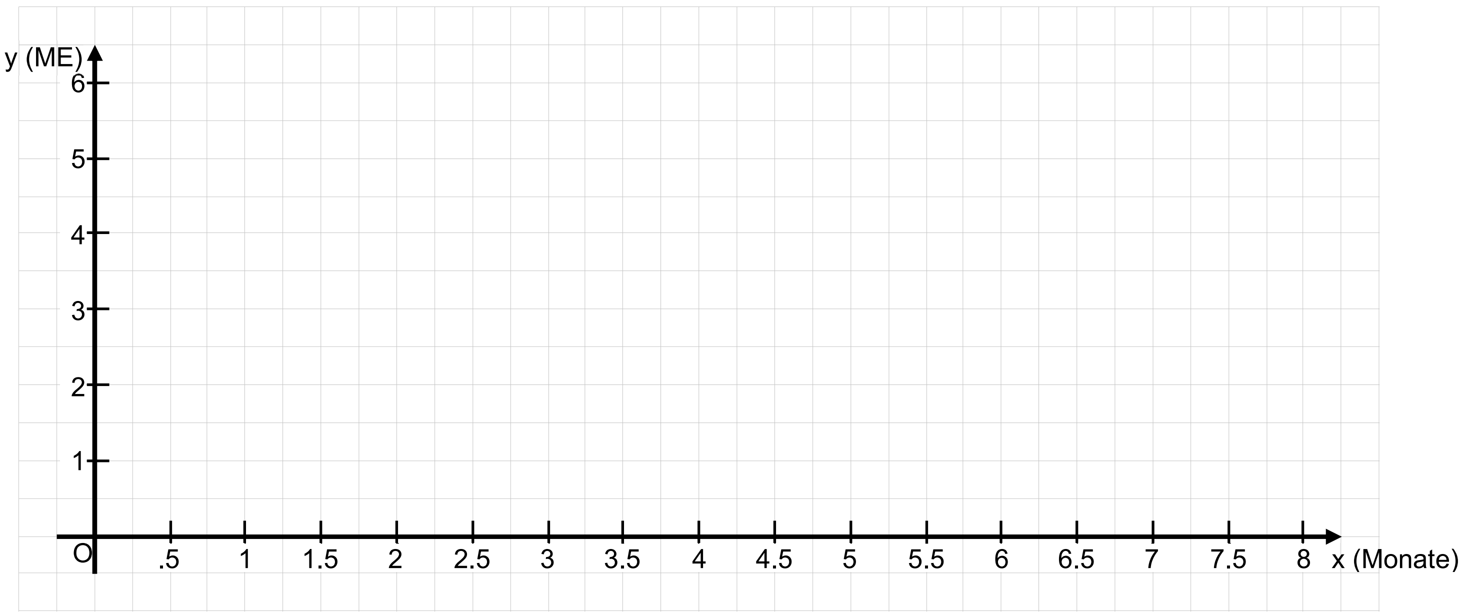
Parameter

Für ein Produkt wird von folgender Absatzfunktion ausgegangen:

$$f_a(x) = \frac{10}{a^2} \cdot x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$$

Dabei gibt x die Zeit in Monaten an, $f_a(x)$ entspricht den abgesetzen Mengeneinheiten pro Monat und a stellt einen Qualitätsparameter dar. Dabei sei x eine positive reelle Zahl und a eine reelle Zahl aus dem Intervall [0,5; 1,5].

a) Zeichnen Sie den Kurvenverlauf von f_a für a = 1 und für a = 1,2 in das vorgegebene Koordinatensystem.



b) Untersuchen Sie anhand von Graphen den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf der Funktion f_a und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Entwicklung des Absatzes.

c) Begründen Sie durch geeignete Rechnung, welche Auswirkungen der Qualitätsparameter a auf den Zeitpunkt und die Höhe des maximalen Absatzes unabhängig vom Qualitätsparameter a ist.

d) Berechnen Sie für a = 1 den Zeitpunkt des maximalen Absatzes und den des größten Absatzrückgangs. Lösung: HP (2 /5,41) => Der maximale Absatz wird nach 2 Monaten erreicht. WP (3,41/3,84) => Der stärkste Absatzrückgang erfolgt nach 3,41 Monaten.

e) Ermitteln Sie für welches a die Absatzmenge von 20,13 ME im 2. Monat erreicht wird.