



Aufgabe:

Die Umsatzzahlen pro Woche werden für ein Produkt durch die Funktion

$$f_{a,b}(t) = a \cdot e^{-0,2 \cdot (0,3 \cdot t - b)^2}$$

angegeben. Dabei gibt $f_{a,b}(t)$ den Umsatz in GE pro Woche an. Es gilt $t \geq 0$. Die Parameter a und b hängen von der Konjunktur ab und sind positiv.

- Berechnen Sie das Umsatzmaximum in Abhängigkeit von den Parametern a und b . Gehen Sie davon aus, dass die hinreichende Bedingung erfüllt ist.
- Analysieren Sie die Auswirkungen von a und b auf das Umsatzmaximum.

Lösung:

Tipp um Doppelbelegungen zu vermeiden.

- Entweder im Scratchpad vorher alle Variablen löschen mit doc → B: Scratchpad löschen oder
- Neues Dokument mit on → 1 → Calculator hinzufügen!

- Funktion definieren als $f(a,b,t) := a \cdot e^{-0,2 \cdot (0,3 \cdot t - b)^2}$ und Ableitungen

$$f'(a,b,t) := \frac{d}{dt}(f(a,b,t)) \quad f''(t) := \frac{d}{dt}(f'(a,b,t))$$

$$\text{CAS-Befehle: } f1(a,b,t) := \frac{d}{dt}(f(a,b,t)) \quad f2(a,b,t) := \frac{d}{dt}(f1(a,b,t))$$

Notwendige Bedingung für Maximum: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3,333 \cdot b$ or $a=0$ (a muss positiv sein, kann also ignoriert werden und wird beim zeros-Befehl auch nicht angezeigt)

CAS-Befehl: solve(f1(a,b,t)=0,t) oder zeros(f1(a,b,t),t)

Hinreichende Bedingung für Maximum: $f'(t) = 0 \wedge f''(t) < 0$ ist erfüllt.

y-Wert: $f(3,333 \cdot b) = a \cdot 1^{b^2} = a$, denn $1^{b^2} = 1$ für alle b .

Das Maximum liegt bei $(3,333 \cdot b / a)$.

- a) Auswirkungen von a auf den x-Wert des Maximums:
→ keine, der x-Wert (der Zeitpunkt des Maximums) ist von a unabhängig und liegt bei $x = 3,33 \cdot b$.

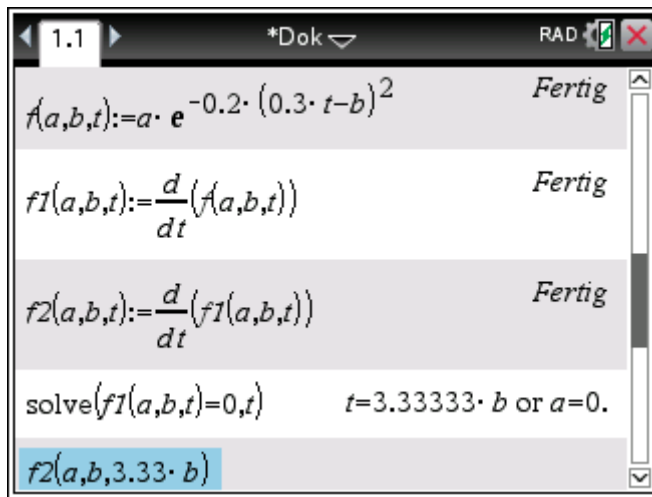
Auswirkungen von a auf den y-Wert des Maximums:
→ je größer der Wert von a, desto größer wird der maximale Umsatz

Auswirkungen von b auf den x-Wert des Maximums:
→ je größer b wird, desto später wird das Umsatzmaximum erreicht

Auswirkungen von b auf den y-Wert des Maximums:
→ keine, der y-Wert nur von a beeinflusst wird.

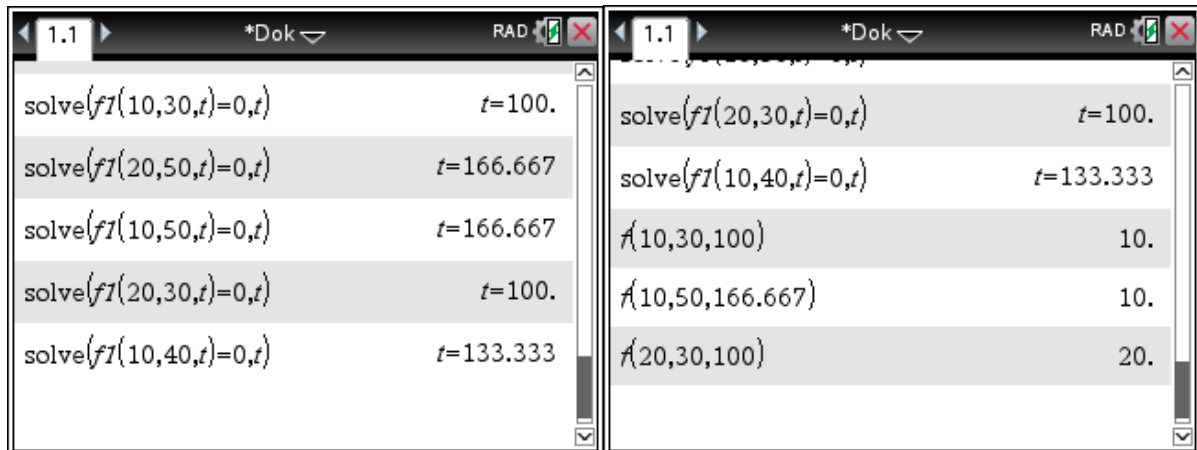
Zusammenfassung:

- Der Parameter a hat nur Auswirkungen auf die Höhe des maximalen Umsatzes und keine Auswirkungen auf den Zeitpunkt.
- Der Parameter b hat nur Auswirkungen auf den Zeitpunkt, an dem der maximale Umsatz erreicht wird und keine Auswirkungen auf die Höhe des maximalen Umsatzes.



```
1.1 *Dok RAD
f(a,b,t):=a * e-0.2 * (0.3 * t - b)2 Fertig
f1(a,b,t):=d/dt(f(a,b,t)) Fertig
f2(a,b,t):=d/dt(f1(a,b,t)) Fertig
solve(f1(a,b,t)=0,t) t=3.33333 * b or a=0.
f2(a,b,3.33 * b)
```

Wenn man ausrechnen möchte, welche Werte die Funktion für bestimmte Kombinationen von a und b annimmt, so setzt man diese Werte als Argumente in die Klammer ein, z.B. für die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt für a = 10 und b = 30:



Im Screenshot links sehen wir in der obersten Zeile, dass der Extrempunkt bei $t = 100$ liegt, wenn $a = 10$ und $b = 30$ ist. Weitere Beispielwerte sind in den folgenden Zeilen zu finden. Der y-Wert des Extrempunktes liegt für $a = 10$ und $b = 30$ bei 10 (siehe 3. Zeile im rechten Screenshot.) Da muss für $t=100$ eingesetzt werden.

Übung: Berechnen Sie den Zeitpunkt des maximalen Umsatzes (x-Wert vom Hochpunkt) und die Höhe des maximalen Umsatzes für folgende Kombinationen:

Wert für a	Wert für b	x-Wert vom HP	y-Wert vom HP
10	20		
30	50		
50	60		
100	200		