

Aufgabe 6 (Lineare Algebra)

Die nebenstehende Tabelle gibt die Materialverflechtung in einem zweistufigen Produktionsprozess an, in dem aus Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 zunächst Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und anschließend Endprodukte E_1 und E_2 entstehen.

		Z_1	Z_2	E_1	E_2
				4	b
		Z_1	Z_2	1	3
R_1		1	0	4	2
R_2		3	1	c	9
R_3		2	a	12	16

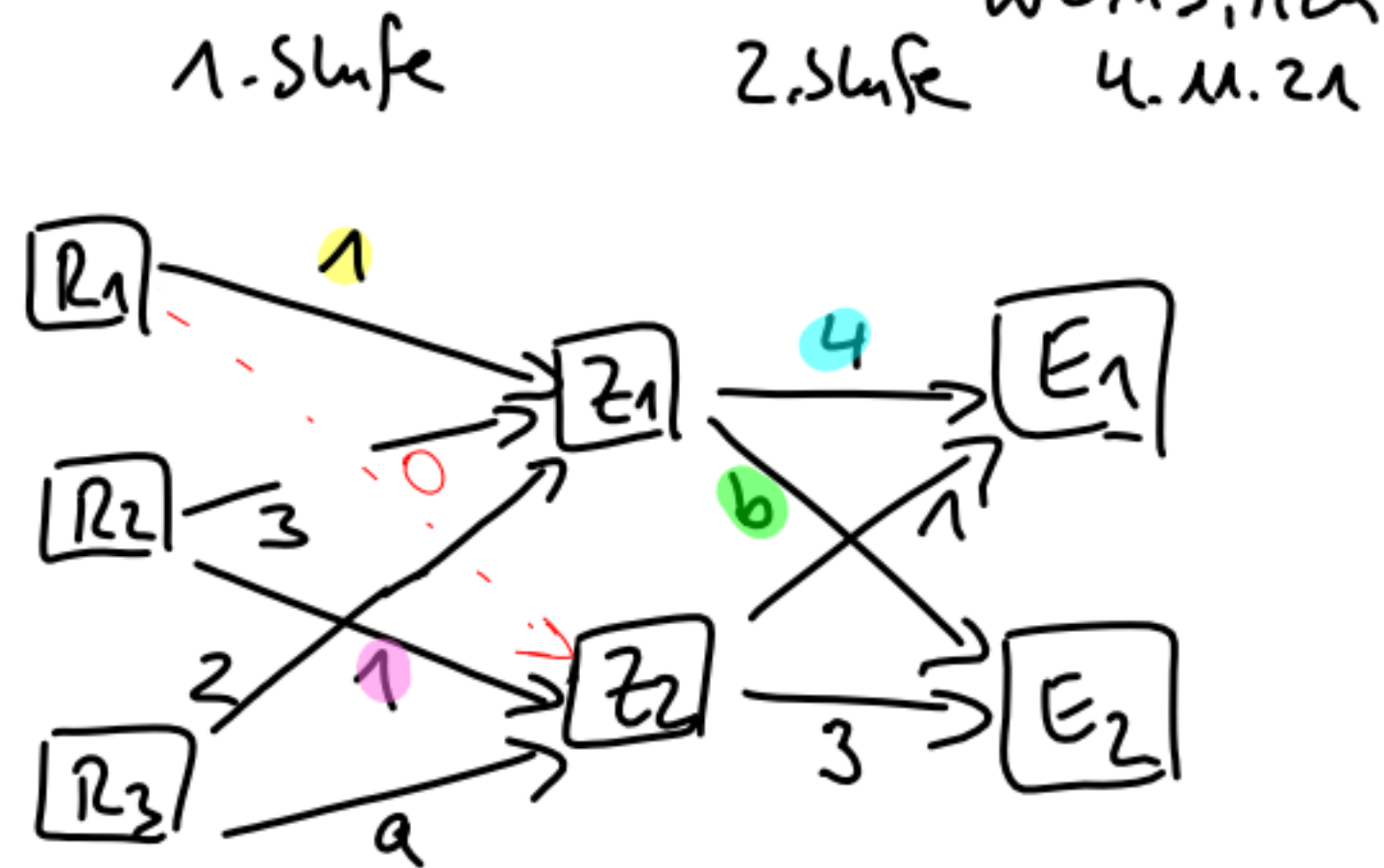
6.1 Zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm der ersten und zweiten Stufe.

3 Punkte

6.2 Ermitteln Sie die fehlenden Werte für a , b und c .

3 Punkte

6.1



6.2,

z.B. mit Matrizen

$$A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 = 2 \times 2 = 3 \times 2$

1. Zeile x 2 Spalte $1 \cdot b + 0 \cdot 3 = 2$

$$\Leftrightarrow \underline{b = 2}$$

3. Zeile x 1. Spalte $2 \cdot 4 + a \cdot 1 = 12$

$$\Leftrightarrow 8 + a = 12 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 4}}$$

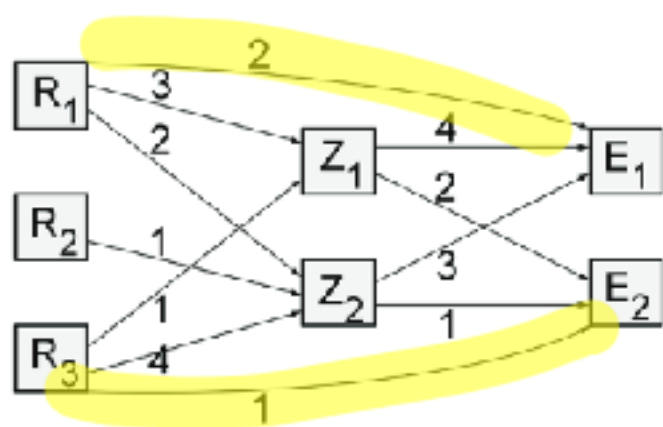
2. Zeile x 1. Spalte: $3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = \underline{\underline{c = 13}}$

8.2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen.

3 Punkte

Aufgabe 8 (Lineare Algebra)

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess wird der Bedarf je Mengeneinheit an Roh- und Zwischenprodukten für die Endprodukte in dem folgenden Verflechtungsdiagramm verdeutlicht. Die Kosten für je eine Mengeneinheiten der Rohstoffe entsprechen dem Zeilenvektor $(2 \ 5 \ 3)$.



8.1 Zeigen Sie, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt: $A_{RE} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$

3 Punkte

8.2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen.

Rohstoffkosten für 1 ME E_1

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} GE \\ ME \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} = 103$$

$1 \times 3 \quad = \quad 3 \times 1$

3 Punkte

$$\begin{matrix} \begin{matrix} E_1 & E_2 \end{matrix} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{matrix} \begin{matrix} E_1 & E_2 \end{matrix} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} E_1 & E_2 \end{matrix} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \quad 3 \times 2 \quad 3 \times 2$

Die Behauptung stimmt, da 10 ME von E_1 Rohstoffkosten von $10 \cdot 103 = 1030$ GE verursachen!

8.1 Es gilt: $A_{RE} \cdot B_{ZE} + C_{RE}$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} Z_1 & Z_2 \end{matrix} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} E_1 & E_2 \end{matrix} \\ Z_1 \\ Z_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} E_1 & E_2 \end{matrix} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \quad = \quad 2 \times 2 \quad 3 \times 2$

C_{RE} stimmt nicht mit der vorgegebenen Matrix überein!

Grund: R_1 und R_3 gehen auch direkt in E_1 bzw. E_2

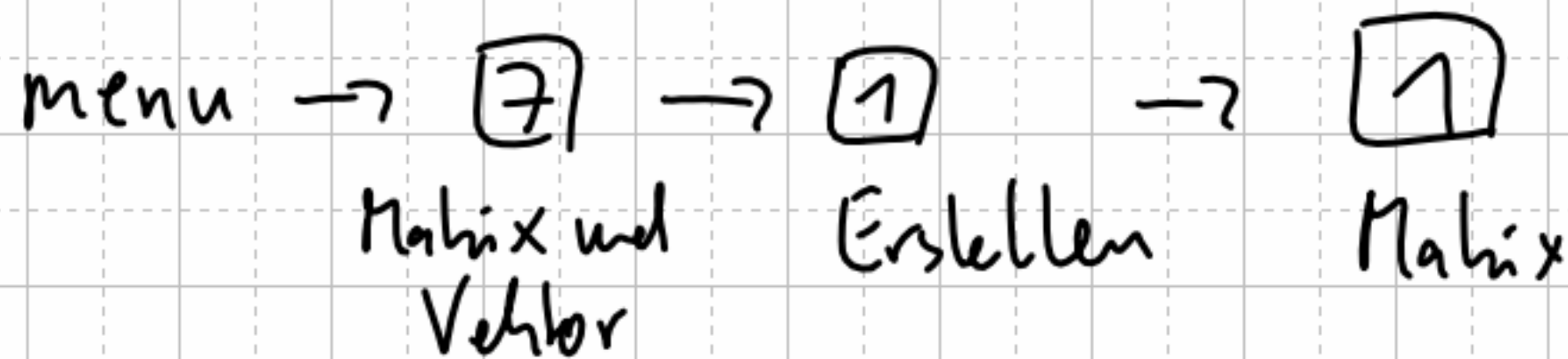
Zweistufiger Produktionsprozess mit CAS

Aufgabe vom 4.11.21

Definition einer Matrix (eines Vektors)

Bsp $A_{2 \times 2}$

$a_{rz} :=$



Aufgabe:

Ein Unternehmen stellt in 2 Produktionsstufen aus 3 Rohstoffen zuerst 4 Zwischenprodukte und aus diesen dann 3 Enderzeugnisse her. Die Stücklisten geben an, wie viel Mengeneinheiten (=ME) der Rohstoffe für die Herstellung einer ME Zwischenprodukte und wie viel ME von den Zwischenprodukten für die Herstellung einer ME Endprodukte benötigt werden.

Stücklisten:

	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄		E ₁	E ₂	E ₃
R ₁	6	2	5	10	Z ₁	5	1	3
R ₂	0	2	2	4	Z ₂	4	2	0
R ₃	3	0	0	3	Z ₃	1	1	0
					Z ₄	3	4	2

Die Einkaufspreise für Rohstoffe und die Fertigungskosten für die Zwischen- und Endprodukte (alles in GE) entnehmen Sie bitte der Tabelle.

Einkaufspreise in GE/ME			Fertigungskosten Zwischenprodukte in GE/ME				Fertigungskosten Endprodukte in GE/ME		
R ₁	R ₂	R ₃	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	E ₁	E ₂	E ₃
1,20	0,80	1,00	12	20	24	15	80	30	60

- Ermitteln Sie, wie viel ME von den Rohstoffen R₁, R₂ und R₃ für die Herstellung einer ME E₁, E₂ und E₃ benötigt werden und geben Sie diese in der Rohstoff-Endproduktmatrix C_{RE} an. Erläutern Sie die Bedeutung von c₂₁ im Sachzusammenhang.
- Die fertigen Zwischenprodukte werden auch an Kunden verkauft. Ein Kunde bestellt 20 ME von Z₁, 50 ME von Z₂, 60 ME von Z₃ und 30 ME von Z₄. Ermitteln Sie die benötigten Rohstoffbedarfe und berechnen Sie die Stückkosten der einzelnen Zwischenprodukte. Geben Sie an, für welche Preise die Zwischenprodukte verkauft werden sollten, wenn ein Gewinnzuschlag von 20% kalkuliert wird.
- Berechnen Sie die Rohstoffkosten für je ein Zwischenprodukt und für je ein Endprodukt.
- Für einen Auftrag müssen 3.500 ME von E₁, 2.000 ME von E₂ und 800 ME von E₃ gefertigt werden. Berechnen Sie den Rohstoffbedarf und die Stückkosten der einzelnen Endprodukte.
- Bei dem Verkauf der Endprodukte plant das Unternehmen einen Gewinn von 10% der jeweiligen Stückkosten. Ermitteln Sie die Verkaufspreise der Endprodukte und be-

rechnen Sie die Gesamterlöse für den Auftrag aus Aufgabe e). Geben Sie an, wie hoch der Gewinn ist, wenn mit Fixkosten in Höhe von 1.000 GE zu rechnen ist.

Tipps zum Vorgehen:

- Definieren Sie die Matrizen und Vektoren mit sinnvollen Bezeichnungen, um sie in verschiedenen Aufgaben verwenden zu können, ohne jedes Mal die Matrix oder den Vektor neu einzugeben.

Mathematische Bezeichnungen: A_{RZ} oder \vec{k}_Z oder \vec{p}_E

- Matrizen mathematisch mit Großbuchstaben A_{RZ}, B_{ZE} und C_{RE}
- Matrizen mit CAS: arz, bze und cre
- „Geldvektoren“ mathematisch mit kleinen Buchstaben und als Zeilenvektoren
 - Rohstoffkostenvektor \vec{p}_R
 - Rohstoffkosten Zwischenprodukte \vec{rk}_Z
 - Fertigungskosten Zwischenprodukte \vec{fk}_Z
 - Stückkosten Zwischenprodukte \vec{k}_Z
 - Verkaufspreisvektor Zwischenprodukte \vec{p}_Z
 - Rohstoffkosten Endprodukte \vec{rk}_E
 - Fertigungskosten Endprodukte \vec{fk}_E
 - (variable) Stückkosten Endprodukte \vec{k}_E
 - Verkaufspreisvektor Endprodukte \vec{p}_E
- Mengenvektoren mathematisch mit kleinen Buchstaben und als Spaltenvektoren
 - Rohstoffmengenvektor \vec{m}_R
 - Zwischenproduktmengenvektor \vec{m}_Z
 - Endproduktmengenvektor \vec{m}_E
- Vektoren mit CAS entsprechend der mathematischen Bezeichnungen

- Überlegen Sie, welches Format das gesuchte Ergebnis haben muss und dann schauen, mit welcher Matrizenmultiplikationen oder Matrizenaddition das Ergebnis zustande kommt.

- Ihre Ergebnisse sollten mathematisch korrekt dokumentiert und mit den entsprechenden CAS-Befehlen kommentiert werden.

Bsp.: math. $\vec{p}_R \cdot C_{RE} = \vec{rk}_E$ CAS: pr · cre = rke

Aufgabe 9 Mathematisch

$$A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} R_1 & E_1 \\ R_2 & E_2 \\ R_3 & E_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 73 & 55 & 38 \\ 22 & 22 & 8 \\ 24 & 15 & 15 \end{pmatrix} = C_{RE}$$

$3 \times 4 \quad = \quad 4 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 3$

CAS: $a_{RZ} := \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 10 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ $b_{ZE} := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$
 $a_{RZ} \cdot b_{ZE}$

$c_{21} = 22$ bedeutet, dass für die Produktion von 1 ME E_1 genau 22 ME von R_2 benötigt werden.

b) Benötigte Matrizen / Vektoren

Mathematisch: $\vec{g}_z = (12 \ 20 \ 24 \ 15)$

A_{zz}

$\vec{p}_r = (1,20 \ 0,80 \ 1)$

$\vec{m}_z = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$

$K \leftarrow M$
↓

CAS: $fk_z :=$

$arz :=$

$pr :=$

$m_z :=$

Rohstoffbedarf für Bestellung:

$A_{Rz} \cdot \vec{m}_z = \begin{pmatrix} 820 \\ 340 \\ 150 \end{pmatrix}$
 $3 \times 4 \quad 4 \times 1 \quad 3 \times 1$

Rohstoffkosten für z* + Fertigungskosten = Stückkosten der z

$\begin{pmatrix} 10,70 & 4 & 7,60 & 18,20 \end{pmatrix}_{1 \times 4} + \begin{pmatrix} 12 & 20 & 24 & 15 \end{pmatrix}_{1 \times 4} = \begin{pmatrix} 22,40 & 24 & 31,6 & 33,2 \end{pmatrix}_{1 \times 4}$

* Rohstoffkosten ZP

$$\begin{array}{c}
 R_1 \quad R_2 \quad R_3 \\
 \text{GE/ME} \begin{pmatrix} 1,20 & 0,80 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \times 3 \\ 3 \times 4 \end{array}
 \end{array}
 = \begin{array}{c} z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \\
 \text{GE/ME} \begin{pmatrix} 10,20 & 4 & 7,6 & 18,2 \end{pmatrix} \\
 1 \times 4
 \end{array}$$

$$\vec{P}_r \cdot A_{RZ}$$