Ein Unternehmen stellt bisher aus 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die 3 Endprodukte E_1, E_2 und E_3 her. Die Stückliste gibt an, wie viele ME der Rohstoffe jeweils für die Herstellung je eines Endproduktes benötigt werden.

Stückliste:

	E_1	E_2	E_3
R_1	1	3	2
R_2	2	2	3
R_3	4	3	1

a) Ein Auftrag über 400 ME von E_1, 250 ME von E_2 und 600 ME von E_3 soll in den nächsten zwei Tagen abgewickelt werden. Ermitteln Sie die notwendigen Mengen der jeweiligen Rohstoffe, die für den Auftrag benötigt werden.

b) Die Produktion von E_1, E_2 und E_3 soll damit auslaufen, dass der Lagerbestand an Rohstoffen möglichst aufgebraucht wird. 560 Stück von R_1, 590 Stück von R_2 und 810 Stück von R_3 sind noch vorrätig. Gibt es eine Produktionsmengenkombination, die dafür sorgt, dass der Lagerbestand **vollständig** aufgebraucht wird?

Bevor Sie versuchen, das Problem (Aufgabe b) zu lösen, sollten Sie Ihre Kenntnisse der Mittelstufenmathematik etwas auffrischen und folgende Aufgaben lösen.

Aufgabe 1: Lösen Sie folgende lineare Gleichung: $4x = 20$

Aufgabe 2: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$
$$y = 4$$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y + 10z = 99$$
$$6y + 2z = 48$$
$$12z = 36$$

Aufgabe 4: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$
$$-4x + 3y = 4$$

Aufgabe 5:
Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b)

WGY13, MLK
11.11.21

a) gesucht: Rohstoffmengenvektor $\vec{m}_R$

$$C_{RE}\cdot\vec{m}_E = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c c} & ME \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 600 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & ME \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2350 \\ 3100 \\ 2950 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$3\times 3 \quad = \quad 3\times 1 \qquad 3\times 1$$

b) gesucht: Endproduktmengenvektor $\vec{m}_E$

$$C_{RE}\cdot\vec{m}_E = \vec{m}_R \qquad \vec{m}_E \text{ unbekannt}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c c} & ME \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & ME \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 560 \\ 590 \\ 810 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1x + 3y + 2z = 560 \\ 2x + 2y + 3z = 590 \\ 4x + 3y + 1z = 810 \end{array} \right|$$

Lineares Gleichungs-System

Bevor Sie versuchen, das Problem (Aufgabe b) zu lösen, sollten Sie Ihre Kenntnisse der Mittelstufenmathematik etwas auffrischen und folgende Aufgaben lösen.

Aufgabe 1: Lösen Sie folgende lineare Gleichung: $4\,x = 20$

Aufgabe 2: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x+3y=20$$
$$y=4$$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x+3y+10z=99$$
$$6y+2z=48$$
$$12z=36$$

Aufgabe 4: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x+3y=20$$
$$-4x+3y=4$$

Aufgabe 5:
Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b) erkennen.

1) $4x = 20 \quad |:4 \iff \underline{x = 5}$

2) Einsetzungsverfahren

$y=4$ in 1. Gleichung einsetzen

$4x + 3\cdot 4 = 20 \iff 4x+12=20 \quad |-12$

$\iff 4x = 8 \quad |:4 \iff \underline{\underline{x=2}}$

Lösung: $x=2 \wedge y=4 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) 3. Gleichung lösen $12z=36 \iff \underline{z=3}$

Einsetzen in 2. Gleichung

$6y+2\cdot 3=48 \iff \underline{y=7}$

Einsetzen in 1. Gleichung

$4x+3\cdot 7+10\cdot 3=99 \iff \underline{x=12}$

Lösung $x=12 \wedge y=7 \wedge z=3$

als Vektor $\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$12z = 36$$

Aufgabe 4: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$
$$-4x + 3y = 4$$

Aufgabe 5:
Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b) erkennen.

4)
$$\begin{array}{l|rcl|} \mathrm{I} & 4x + 3y & = & 20 \\ \mathrm{II} & -4x + 3y & = & 4 \end{array} \quad \oplus$$

NR1

$$\begin{array}{l|rcl|} \mathrm{I} & 4x + 3y & = & 20 \\ \mathrm{IIa} & 6y & = & 24 \end{array}$$

Probe: I $4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$ ✓
II $-4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 4$ ✓

Additionsverfahren

$$\begin{array}{rrcl} & 4x + 3y & = & 20 \\ + & (-4)x + 3y & = & 4 \\ \hline \mathrm{IIa} & 6y & = & 24 \end{array}$$

IIa lösen $6y = 24 \Leftrightarrow \underline{y = 4}$

$y = 4$ in I einsetzen $4x + 3 \cdot 4 = 20$

$\Leftrightarrow \underline{x = 2}$

Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme

Ziel: Umformen von Gleichungen innerhalb eines Gleichungssystems so dass eine Gleichung nur eine Variable, eine Gleichung nur zwei Variable, eine Gleichung nur drei Variable enthält usw...

Dann können die Gleichungen sukzessive (nacheinander) gelöst werden.

Erlaubt sind Äquivalenzumformungen
- Gleichungen mit einer Zahl ungleich 0 multiplizieren
- " durch " " " dividieren
- Zahlen dürfen addiert / subtrahiert werden
- Vertauschen von Gleichungen
- Addieren / Subtrahieren von Gleichungen

→ unterhalb der Hauptdiagonalen müssen Nullen erzeugt werden

Bsp. $$\left|\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right| \xrightarrow{\text{Gauß-Alg.}} \left|\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right| \begin{array}{l} \leftarrow 3 \text{ Variable} \\ \leftarrow 2 \text{ "} \\ \leftarrow 1 \text{ "} \end{array}$$

Lösung $x=4 \Leftarrow \quad x = 4 \quad | \cdot x$ ist keine Äquivalenz-
umformung

$x^2 = 4x \rightarrow$ Lösung $x=4 \wedge x=0$