

Ein Unternehmen stellt bisher aus 3 Rohstoffen  $R_1, R_2$  und  $R_3$  die 3 Endprodukte  $E_1, E_2$  und  $E_3$  her. Die Stückliste gibt an, wie viele ME der Rohstoffe jeweils für die Herstellung je eines Endproduktes benötigt werden.

Stückliste:

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$R_1$	1	3	2
$R_2$	2	2	3
$R_3$	4	3	1

- a) Ein Auftrag über 400 ME von  $E_1$ , 250 ME von  $E_2$  und 600 ME von  $E_3$  soll in den nächsten zwei Tagen abgewickelt werden. Ermitteln Sie die notwendigen Mengen der jeweiligen Rohstoffe, die für den Auftrag benötigt werden.
- b) Die Produktion von  $E_1, E_2$  und  $E_3$  soll damit auslaufen, dass der Lagerbestand an Rohstoffen möglichst aufgebraucht wird. 560 Stück von  $R_1$ , 590 Stück von  $R_2$  und 810 Stück von  $R_3$  sind noch vorrätig. Gibt es eine Produktionsmengenkombination, die dafür sorgt, dass der Lagerbestand **vollständig** aufgebraucht wird?



Bevor Sie versuchen, das Problem (Aufgabe b) zu lösen, sollten Sie Ihre Kenntnisse der Mittelstufenmathematik etwas auffrischen und folgende Aufgaben lösen.

**Aufgabe 1:** Lösen Sie folgende lineare Gleichung:  $4x = 20$

**Aufgabe 2:** Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:  
 $4x + 3y = 20$   
 $y = 4$

**Aufgabe 3:** Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:  
 $4x + 3y + 10z = 99$   
 $6y + 2z = 48$   
 $12z = 36$

**Aufgabe 4:** Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:  
 $4x + 3y = 20$   
 $-4x + 3y = 4$

**Aufgabe 5:**

Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b)

W6Y13, MLK

11.11.21

a) gesucht: Rohstoffmengenvektor  $\vec{m}_R$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} \cdot \vec{m}_E = \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} ME \\ ME \\ ME \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} ME \\ ME \\ ME \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2350 \\ 3200 \\ 2950 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 = 3 \times 1$        $3 \times 1$

b) gesucht: Endproduktmengenvektor  $\vec{m}_E$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} \cdot \vec{m}_E = \begin{matrix} ME \\ ME \\ ME \end{matrix} \cdot \vec{m}_R$$

$\vec{m}_E$  unbekannt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 560 \\ 590 \\ 810 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 1x + 3y + 2z = 560 \\ 2x + 2y + 3z = 590 \\ 4x + 3y + 1z = 810 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Lineares} \\ \text{Gleichungs-} \\ \text{System} \end{array}$$

Bevor Sie versuchen, das Problem (Aufgabe b) zu lösen, sollten Sie Ihre Kenntnisse der Mittelstufenmathematik etwas auffrischen und folgende Aufgaben lösen.

**Aufgabe 1:** Lösen Sie folgende lineare Gleichung:  $4x = 20$

**Aufgabe 2:** Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$

$$y = 4$$

**Aufgabe 3:** Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y + 10z = 99$$

$$6y + 2z = 48$$

$$12z = 36$$

**Aufgabe 4:** Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$

$$-4x + 3y = 4$$

**Aufgabe 5:**

Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b) erkennen.

1

$$1) \quad 4x = 20 \quad | :4 \Leftrightarrow \underline{x = 5}$$

$$2) \quad \text{Einsetzungsverfahren}$$

$y = 4$  in 1. Gleichung einsetzen

$$4x + 3 \cdot 4 = 20 \Leftrightarrow 4x + 12 = 20 \quad | -12$$
$$\Leftrightarrow 4x = 8 \quad | :4 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$$

$$\text{Lösung: } x = 2 \wedge y = 4 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \text{3. Gleichung lösen } 12z = 36 \Leftrightarrow \underline{z = 3}$$

Einsetzen in 2. Gleichung

$$6y + 2 \cdot 3 = 48 \Leftrightarrow \underline{y = 7}$$

Einsetzen in 1. Gleichung

$$4x + 3 \cdot 7 + 10 \cdot 3 = 99 \Leftrightarrow \underline{x = 12}$$

$$\text{Lösung } x = 12 \wedge y = 7 \wedge z = 3$$

als Vektor  $\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$12z = 36$$

**Aufgabe 4:** Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$

$$-4x + 3y = 4$$

**Aufgabe 5:**

Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b) erkennen.

$$4) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \left| \begin{array}{l} 4x + 3y = 20 \\ -4x + 3y = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{NR1} \\ \leftarrow \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IIa} \end{array} \left| \begin{array}{l} 4x + 3y = 20 \\ 6y = 24 \end{array} \right|$$

Probe:  $\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20 \quad \checkmark \\ -4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 4 \quad \checkmark \end{array}$

## Additionsverfahren

$$\begin{array}{r} 4x + 3y = 20 \\ + (-4)x + 3y = 4 \\ \hline \text{IIa} \quad 6y = 24 \end{array}$$

IIa lösen  $6y = 24 \Leftrightarrow \underline{y = 4}$

$y = 4$  in I einsetzen  $4x + 3 \cdot 4 = 20$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 2}$$

Lösungsvektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

# Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme

Ziel: Umformen von Gleichungen innerhalb eines Gleichungssystems so dass eine Gleichung nur eine Variable, eine Gleichung nur zwei Variable, eine Gleichung nur drei Variable enthält usw....

Dann können die Gleichungen sukzessive (nacheinander) gelöst werden.

Erlaubt sind Äquivalenzumformungen

- Gleichungen mit einer Zahl ungleich 0 multiplizieren
- " " durch " " " " dividieren
- Zahlen dürfen addiert / subtrahiert werden
- Vertauschen von Gleichungen
- Addieren / Subtrahieren von Gleichungen

→ unterhalb der Hauptdiagonalen müssen Nullen erzeugt werden

Bsp.

$$\left| \begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right| \xrightarrow{\text{Gauß-Alg.}} \left| \begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow 3 \text{ Variable} \\ \leftarrow 2 \text{ " } \\ \leftarrow 1 \text{ " } \end{array}$$

Aufgabe b)

Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1x + 3y + 2z = 560 \\ 2x + 2y + 3z = 590 \\ 4x + 3y + 1z = 810 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot (-2) \text{ NR1} \\ | \cdot (-4) \text{ NR2} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{NR1} \\ \text{IIa} \end{array} \begin{array}{l} -2x - 6y - 4z = -1120 \\ + 2x + 2y + 3z = 590 \\ \hline 0 - 4y - 1z = -530 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IIa} \\ \text{IIIa} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1x + 3y + 2z = 560 \\ -4y - 1z = -530 \\ -9y - 7z = -1430 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot 9 \\ | \cdot (-4) \leftarrow \oplus \end{array} \text{NR3}$$

$$\begin{array}{l} \text{NR2} \\ \text{IIIa} \end{array} \begin{array}{l} -4x - 12y - 8z = -2240 \\ + 4x + 3y + 1z = 810 \\ \hline 0 - 9y - 7z = -1430 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IIa} \\ \text{IIIb} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1x + 3y + 2z = 560 \\ -4y - 1z = -530 \\ 19z = 950 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} \text{NR3} \\ \text{IIIb} \end{array} \begin{array}{l} -36y - 9z = -4770 \\ + 36y + 28z = 5720 \\ \hline 0 + 19z = 950 \end{array}$$

$\Rightarrow$  LGS in Diagonalform ist lösbar!

IIIb  $19z = 950 \quad | :19 \Leftrightarrow z = 50 \rightarrow$  in IIa

IIa  $-4y - 1 \cdot 50 = -530 \Leftrightarrow y = 120 \rightarrow$  in I

I  $1x + 3 \cdot 120 + 2 \cdot 50 = 560 \Leftrightarrow x = 100$

Antwort: Wenn von E1 100 ME, von E2 120 ME und von E3 50 ME hergestellt werden, wird der Lagerbestand vollständig aufgebraucht!

Probe:

$$C_{RE} \cdot \vec{m}_E = \vec{m}_R$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 560 \\ 590 \\ 810 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Lösungsvektor

$$\vec{m}_E = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix}$$

# Gauß-Algorithmus für LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen

1) LGS notieren

$$\begin{array}{l|l} \text{I} & \\ \text{II} & \\ \text{III} & \end{array}$$

2) Mit I und II  $\rightarrow$   $\text{II}_a$  berechnen

3) Mit I und III  $\rightarrow$   $\text{III}_a$  berechnen

4) Mit  $\text{II}_a$  und  $\text{III}_a \rightarrow$   $\text{III}_b$  berechnen

$$\begin{array}{l|l} \text{I} & \\ \text{II}_a & \\ \text{III}_a & \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \_ \\ \_ \\ \_ \end{array} \left| \right.$$

$$\begin{array}{l|l} \text{I} & \\ \text{II}_a & \\ \text{III}_b & \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \_ \\ \_ \\ 0 \end{array} \left| \right.$$

5) Nacheinander (subressive) Variablen ausrechnen mit  $\text{III}_b$ ,  $\text{II}_a$  und I

6) Antwort formulieren und evtl. Probe machen

Hinweis: Je nach LGS kann es sinnvoll oder nötig sein vom Schema F abzuweichen und anders vorzugehen!

# Übung Buch S. 520 Alles klar? Lagerraumproblem

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \\
 \text{II} \\
 \text{III}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3x + 4y + 5z = 4250 \\
 3x + 3y + 2z = 2895 \\
 4x + 2y + 3z = 3335
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 \text{NR1} \\
 \leftarrow \ominus \\
 \end{array} \begin{array}{l}
 | \cdot 4 \\
 \text{NR2} \\
 \leftarrow \ominus
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{NR1} \\
 \text{IIa}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 3x + 4y + 5z = 4250 \\
 - \\
 3x + 3y + 2z = 2895 \\
 \hline
 0 \quad 1y + 3z = 1355
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \\
 \text{IIa} \\
 \text{IIIa}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3x + 4y + 5z = 4250 \\
 1y + 3z = 1355 \\
 10y + 11z = 6995
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 \text{NR3} \\
 | \cdot 10 \\
 \leftarrow \ominus
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{NR2} \\
 \text{IIa} \\
 \text{NR3}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 12x + 16y + 20z = 17000 \\
 - \\
 12x + 6y + 9z = 10005 \\
 \hline
 0 \quad 10y + 11z = 6995
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \\
 \text{IIa} \\
 \text{IIIb}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3x + 4y + 5z = 4250 \\
 1y + 3z = 1355 \\
 19z = 6555
 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l}
 \text{NR3} \\
 \text{IIa} \\
 \text{NR3}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 10y + 30z = 13550 \\
 - \\
 10y + 11z = 6995 \\
 \hline
 0 + 19z = 6555
 \end{array}$$

⇒ LGS in Diagonalform lösbar!

Antwort: Der Lagerbestand wird vollständig aufgebraucht, wenn von P<sub>1</sub> 415 ME, von P<sub>2</sub> 320 ME und von P<sub>3</sub> 345 ME produziert werden!

$$\text{III b} \quad 19z = 6555 \Leftrightarrow z = 345$$

$$\text{II a} \quad 1y + 3 \cdot 345 = 1355 \Leftrightarrow y = 320$$

$$\text{I} \quad 3x + 4 \cdot 320 + 5 \cdot 345 = 4250 \Leftrightarrow x = 415$$



$$\begin{array}{l|l} \text{III} & 3x + 6y = 15 \\ \text{II} & 9x + 18y = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \cdot (-3) \\ \leftarrow \end{array}$$

---

$$\begin{array}{l|l} \text{III} & 3x + 6y = 15 \\ \text{IIa} & 0x + 0y = -40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{IIa} \\ + \\ -9x - 18y = -45 \\ 9x + 18y = 5 \\ \hline 0x + 0y = -40 \end{array}$$