Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel)

Im Lager eines Unternehmens befinden sich y_1 ME vom Rohstoff R_1 und y_2 ME vom Rohstoff R_2. Die Mengen x_1 des Endproduktes E_1 und x_2 des Endprodukts E_2, die sich daraus herstellen lassen, können durch das folgende Gleichungssystem berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Matrix C_{RE} an.

b) Begründen Sie mit den Rangkriterien, dass es zu einem vorgegebenen Lagerbestand an Rohstoffen immer nur höchstens eine eindeutig bestimmte Mengenkombination an Endprodukten geben kann.

Aufgabe 2 (mit CAS)

Ermitteln Sie, für welche reellen Zahlen anstelle von a die Matrizengleichung eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar oder unlösbar ist. (Sie müssen die Lösungen nicht angeben!) Begründen Sie Ihre Antworten!

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Bei Aufgabe a) müssen Sie die Fälle a = 0 und a≠ 0 getrennt voneinander untersuchen.

Aufgabe 3 (mit CAS)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Rangkriterien die Lösungsmengen und die Lösungen der linearen Gleichungssysteme.

a) $$\begin{pmatrix} x+5y+3z=10 \\ 4x+3y+z=20 \\ 6x+13y+7z=25 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x+5y+3z=6 \\ 4x+3y+z=0 \\ 17y+11z=24 \end{pmatrix}$$

W6Y13
MLK, 25.11.21

a) $C_{RE} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\left|\begin{matrix} 10 & 15 & y_1 \\ 10 & 9 & y_2 \end{matrix}\right| \; \text{d} -$

$\left|\begin{matrix} 10 & 15 & y_1 \\ 0 & 6 & y_1-y_2 \end{matrix}\right|$

$y_1 \geq y_2$ muss gelten

$$\left.\begin{matrix} Rg(A) = 2 \\ Rg(A|b) = 2 \end{matrix}\right\} \text{eindeutige Lösung wenn } y_1 \geq y_2$$

Falls $y_1 < y_2$ gibt es zwar eine mathematische, aber keine ökonomisch sinnvolle Lösung, da $x_2 < 0$ gelten würde.

Aufgabe 2 (mit CAS)

Ermitteln Sie, für welche reellen Zahlen anstelle von a die Matrizengleichung eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar oder unlösbar ist. (Sie müssen die Lösungen nicht angeben!) Begründen Sie Ihre Antworten!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2a) Fallunterscheidung

1) $a = 0 \Rightarrow Rg(A) = Rg(A|b) = 2 < 3$

3 = Zeilenzahl von A

$\Rightarrow$ LGS ist mehrdeutig lösbar

2) $a \neq 0 \Rightarrow Rg(A) = Rg(A|b) = 3$

$\Rightarrow$ LGS ist eindeutig lösbar

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & a & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{a}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a+4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$Rg(A) = 3 = Rg(A|b) =$ Zeilenzahl von A

$\Rightarrow$ LGS ist eindeutig lösbar, egal welchen Wert a annimmt.

Der Wert von a hat keinen Einfluss auf die Ränge, anders als bei 2a).

2b) mit rref $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eindeutig ablesbar

Aufgabe 3 (mit CAS)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Rangkriterien die Lösungsmengen und die Lösungen der linearen Gleichungssysteme.

a) $\begin{pmatrix} 1x+5y+3z=10 \\ 4x+3y+z=20 \\ 6x+13y+7z=25 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x+5y+3z=6 \\ 4x+3y+z=0 \\ 17y+11z=24 \end{pmatrix}$

3a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 20 \\ 6 & 13 & 7 & 25 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{13}{6} & \frac{7}{6} & \frac{25}{6} \\ 0 & 1 & \frac{11}{17} & -\frac{10}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$Rg(A) = 2 < 3 = Rg(A|b)$

$\Rightarrow$ LGS ist unlösbar.

3b) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -11 & 24 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{106}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{160}{11} \end{vmatrix}$

$Rg(A) = 3 = Rg(A|b) =$ Zeilenzahl A

$\Rightarrow$ Lösung eindeutig

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{106}{11} \\ -8 \\ -\frac{160}{11} \end{pmatrix}$$

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus drei Rohstoffen drei Zwischenprodukte und aus den drei Zwischenprodukten drei Endprodukte hergestellt. Folgende Stücklisten sind bekannt:

	Z1	Z2	Z3
R1	2	6	8
R2	1	5	7
R3	2	0	3

	E1	E2	E3
R1	46	62	98
R2	38	53	81
R3	21	20	34

Der Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten ist nicht bekannt, soll aber ermittelt werden.

Ansatz: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ mit der unbekannten Matrix B_{ZE}, die im Folgenden X genannt wird.

1. Idee: $A \cdot X = C \mid :A$ funktioniert nicht, da die Division durch Matrizen nicht definiert ist.

2. Idee: Einheitsmatrix E und eine Art „Kehrbruch“ oder „Kehrmatrix“ verwenden wie bei Zahlen, z.B. $5 \cdot 5^{-1} = 5^{1+(-1)} = 5^0 = 1$

Test mit CAS: $$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 = A_{RZ} \cdot A_{RZ}^{-1}$$

und $$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{-9}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{11}{16} & \frac{-5}{8} & \frac{-3}{8} \\ \frac{-5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = A_{RZ}^{-1}$$

Definition: Eine quadratische Matrix, die beim Multiplizieren mit einer quadratischen Matrix A, die entsprechende Einheitsmatrix E ergibt, nennt man zu A **inverse Matrix** und bezeichnet sie mit $\mathbf{A^{-1}}$.Der CAS-Befehl lautet: A^{-1}

Frage: Was hilft uns das für das obige Problem?

Antwort: Multiplizieren Sie die Gleichung $A \cdot X = C$ mit A^{-1} (von links) und schauen Sie, was passiert.

Erinnerung:

$5 \cdot x = 1 \quad | :5$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$ Probe $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ ✓

Andere Schreibweise

$\frac{1}{5} = 5^{-1}$

$\Rightarrow 5 \cdot \frac{1}{5} = 5^1 \cdot 5^{-1} = 5^{1-1} = 5^0 = 1$

Mit Matrizen

$A^1 \cdot A^{-1} = A^{1-1} = A^0 = E$

$A \cdot X = C \mid \cdot A^{-1}$ (beide Seiten der Gleichung werden von links mit A^{-1} multipliziert)

$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C$ (nun kann man auf der linken Seite $A^{-1} \cdot A^{-1}$ zunächst in Klammern setzen und dann multiplizieren: das Ergebnis ist die Einheitsmatrix E)

$\Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C$

$\Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot C$ Das Multiplizieren einer Matrix mit der Einheitsmatrix E ist wie das Multiplizieren einer Zahl mit 1. Die Matrix wird ebenso wie die Zahl dadurch nicht verändert. Man nennt das „neutrales Element der Multiplikation“.

$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot C$

Durch geschicktes Multiplizieren einer Matrix-Gleichung mit einer entsprechenden Inversen, kann man also „nach X auflösen“, auch wenn X eine Matrix ist.

Probe: Rechnen Sie mit Hilfe des CAS das Ergebnis von $A^{-1} \cdot C = X = B_{ZE}$ aus und multiplizieren Sie dann, wie gewohnt $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ und vergleichen Sie mit der Stückliste. Geben Sie die Matrix B_{ZE} an.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&6&8\\1&5&7\\2&0&3\end{pmatrix}}_{A}{}^{-1}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}46&62&98\\38&53&81\\21&20&34\end{pmatrix}}_{C}$$

$$=\begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline Z_1 & 3 & 1 & 5 \\ Z_2 & 0 & 2 & 4 \\ Z_3 & 5 & 6 & 8 \end{array} = B_{ZE}$$

Probe:

$$A_{RZ}\cdot B_{ZE}=\begin{pmatrix}2&6&8\\1&5&7\\2&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&5\\0&2&4\\5&6&8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}46&62&98\\38&53&81\\21&20&34\end{pmatrix}=C_{RE}\ \checkmark$$

Aufgabe 4 (mit CAS)

C_{RE}

	Royal	Deluxe	Young
Leder	19	20	20
Kunstleder	22	26	25
Canvas	22	31	28

A_{RZ}

	S1	S2	S3
Leder	4	2	3
Kunstleder	4	3	4
Canvas	3	4	5

In der Schülke GmbH werden in einem zweistufigen Produktionsprozess exklusive Handtaschen in Patchwork-Technik gefertigt. In einer ersten Produktionsstufe werden aus drei Rohstoffen (Leder, Kunstleder und Canvas) drei verschiedene Zwischenprodukte (Stoffteile S1, S2 und S3) hergestellt und aus diesen dann drei Endprodukte (Handtaschen Royal, Deluxe und Young). Die Stücklisten zeigen die ME der benötigten Rohstoffe für eine ME der Handtaschen und die für eine ME der Stoffteile erforderlichen ME an Rohstoffen.

Ermitteln Sie die Matrix B_{ZE}, die angibt, wie viele ME der einzelnen Stoffteile für je eine ME der Handtaschen benötigt werden.

Aufgabe 5 (ohne CAS)

Lösen Sie folgende Matrizengleichungen durch geschicktes Multiplizieren mit Inversen

Aufgabe 4 (mit CAS)

C_{RE}

	Royal	Deluxe	Young
Leder	19	20	20
Kunstleder	22	26	25
Canvas	22	31	28

A_{RZ}

	S1	S2	S3
Leder	4	2	3
Kunstleder	4	3	4
Canvas	3	4	5

In der Schülke GmbH werden in einem zweistufigen Produktionsprozess exklusive Handtaschen in Patchwork-Technik gefertigt. In einer ersten Produktionsstufe werden aus drei Rohstoffen (Leder, Kunstleder und Canvas) drei verschiedene Zwischenprodukte (Stoffteile S1, S2 und S3) hergestellt und aus diesen dann drei Endprodukte (Handtaschen Royal, Deluxe und Young). Die Stücklisten zeigen die ME der benötigten Rohstoffe für eine ME der Handtaschen und die für eine ME der Stoffteile erforderlichen ME an Rohstoffen.

Ermitteln Sie die Matrix B_{ZE}, die angibt, wie viele ME der einzelnen Stoffteile für je eine ME der Handtaschen benötigt werden.

Aufgabe 5 (ohne CAS)

Lösen Sie folgende Matrizengleichungen durch geschicktes Multiplizieren mit Inversen Matrizen nach X auf. Eventuell müssen vorher Matrizen durch Addition oder Subtraktion „auf die andere Seite gebracht werden". Achten Sie auf Multiplikation von links oder rechts.

1) $X \cdot A = B$
2) $A \cdot X + B = C$
3) $A \cdot X \cdot B = C$
4) $X \cdot B = C$
5) $A \cdot X \cdot A = B$
6) $B \cdot A + X = A \cdot X$

4) $A_{RZ} \cdot \underbrace{B_{ZE}}_{=X} = C_{RE}$

$\Leftrightarrow A_{RZ} \cdot X = C_{RE} \quad | \cdot A_{RZ}^{-1}$ v. links

$\Leftrightarrow \underbrace{A_{RZ}^{-1} \cdot A_{RZ}}_{=E} \cdot X = A^{-1} \cdot C_{RE}$

$\Leftrightarrow \underbrace{E \cdot X}_{=X} = A^{-1} \cdot C_{RE} \Leftrightarrow X = A_{RZ}^{-1} \cdot C_{RE}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 20 & 20 \\ 22 & 26 & 25 \\ 22 & 31 & 28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = B_{ZE}$$

Probe: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 20 & 20 \\ 22 & 26 & 25 \\ 22 & 31 & 28 \end{pmatrix}$