

Aufgabe 5 (ohne CAS)

Lösen Sie folgende Matrixgleichungen durch geschicktes Multiplizieren mit Inversen Matrizen nach X auf. Eventuell müssen vorher Matrizen durch Addition oder Subtraktion „auf die andere Seite gebracht werden“. Achten Sie auf Multiplikation von links oder rechts.

1) $X \cdot A = B$

2) $A \cdot X + B = C$

3) $A \cdot X \cdot B = C$

4) $X \cdot B = C$

5) $A \cdot X \cdot A = B$

6) $B \cdot A + X = A \cdot X$

1) $X \cdot A = B \quad | \cdot A^{-1} \text{ von rechts}$

$$\Leftrightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=E} = B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

2) $A \cdot X + B = C \quad | -B \Leftrightarrow A \cdot X = C - B \quad | \cdot A^{-1} \text{ von links}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

3) $A \cdot X \cdot B = C \quad | \cdot A^{-1} \text{ von links} \quad | \cdot B^{-1} \text{ von rechts}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{=E} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Aufgabe 5 (ohne CAS)

Lösen Sie folgende Matrixgleichungen durch geschicktes Multiplizieren mit Inversen Matrizen nach X auf. Eventuell müssen vorher Matrizen durch Addition oder Subtraktion „auf die andere Seite gebracht werden“. Achten Sie auf Multiplikation von links oder rechts.

$$6x - 1 \cdot x =$$

1) $X \cdot A = B$

2) $A \cdot X + B = C$

3) $A \cdot X \cdot B = C$

4) $X \cdot B = C$

5) $A \cdot X \cdot A = B$

6) $B \cdot A + X = A \cdot X$

$$4) \quad X \cdot B = C \quad | \cdot B^{-1} \text{ v.r.} \Leftrightarrow X = C \cdot B^{-1}$$

$$5) \quad A \cdot X \cdot A = B \quad | \cdot A^{-1} \text{ v.l.} \quad | \cdot A^{-1} \text{ v.r.}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=E} = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$6) \quad B \cdot A + X = A \cdot X \quad | - X \Leftrightarrow B \cdot A = A \cdot X - E \cdot X \Leftrightarrow B \cdot A = (A - E) \cdot X \quad | \cdot (A - E)^{-1} \text{ v.l.}$$

X nach rechts ausklammern

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A - E)^{-1} \cdot B \cdot A}_{=E} = \underbrace{(A - E)^{-1} \cdot (A - E)}_{=E} \cdot X = X$$

Inverse Matrizen (ohne CAS)

$$| A : E | \xrightarrow[\text{Algorithmus}]{\text{Gau\ss-}} | E : A^{-1} |$$

Am Beispiel einer 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-6}{15} \\ \frac{2}{10} & \frac{-3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-3}{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \\ \text{II} \end{array} \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} :2 \\ :3 \end{array} \leftarrow -$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \\ \text{II} \end{array} \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{l} :5 \\ :2 \end{array} \leftarrow +$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \\ \text{II} \end{array} \left| \begin{array}{cc|cc} 15 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & -10 & 2 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{l} :15 \\ :(-10) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \\ \text{II} \end{array} \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{10} \end{array} \right|$$

NR

$$\begin{array}{cccc} - & 6 & 8 & 2 & 0 \\ & 6 & 18 & 0 & 3 \\ \hline & 0 & -10 & 2 & -3 \\ 6-6 & 8-18 & 2-0 & 0-3 & \\ \hline & 15 & 20 & 5 & 0 \\ + & 0 & -20 & 4 & -6 \\ \hline & 15 & 0 & 9 & -6 \end{array}$$