W6Y13, MLK, 29.11.21

Inverse Matrizen

Allgemeine Formel für 2x2-Matrizen

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gesucht ist A^{-1}. Vorgehen $\left| A \,\middle|\, E \right| \xrightarrow{\text{Gauß}} \left| E \,\middle|\, A^{-1} \right|$

$$\begin{array}{l|cc|cc|l} \mathrm{I} & a & b & 1 & 0 & \cdot c \\ \mathrm{II} & c & d & 0 & 1 & \cdot a \;\; \leftarrow - \end{array}$$

NR

$$\begin{array}{lcccc} & ac & bc & c & 0 \\ - & ac & ad & 0 & a \\ \hline \mathrm{IIa} & 0 & bc-ad & c & -a \end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc|l} \mathrm{I} & a & b & 1 & 0 & \cdot (bc-ad) \;\; \leftarrow - \\ \mathrm{IIa} & 0 & bc-ad & c & -a & \cdot b \end{array}$$

NR

$$\begin{array}{lcccc} & 0 & b\cdot(bc-ad) & bc & -ab \\ - & a\cdot(bc-ad) & b\cdot(bc-ad) & bc-ad & 0 \\ \hline \mathrm{Ia} & -a(bc-ad) & 0 & ad & -ab \end{array}$$

$$\begin{array}{l|cc|cc|l} \mathrm{Ia} & -a\cdot(bc-ad) & 0 & ad & -ab & :(-a\cdot(bc-ad)) \\ \mathrm{IIa} & 0 & bc-ad & c & -a & :(bc-ad) \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dfrac{ad}{-a(bc-ad)} & \dfrac{-ab}{-a\cdot(bc-ad)} \\ 0 & 1 & \dfrac{c}{bc-ad} & \dfrac{-a}{bc-ad} \end{array} \right|$$

→ weiter auf Tafel 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cancel{a}d}{\cancel{-a}\cdot(bc-ad)} & \frac{\cancel{-}ab}{\cancel{-a}\cdot(bc-ad)} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{-a}{bc-ad} \end{pmatrix} = \frac{1}{bc-ad} \cdot \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

<u>Bsp:</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3\cdot 1 - 2\cdot 4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Probe: $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

Problem: Die inverse Matrix A^{-1} zu einer quadratischen 2x2-Matrix existiert nicht, wenn $b \cdot c = a \cdot d$ bzw. $b \cdot c - a \cdot d = 0$ gilt!

Satz: Für eine 2x2-Matrix existiert eine inverse Matrix genau dann, wenn der Rang der Matrix gleich 2 ist.

Allgemein: Eine m×m-Matrix A besitzt eine inverse Matrix A^{-1}, wenn $Rg\,A = m$ gilt.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ Rang bestimmen $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \leftarrow - \end{matrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $Rg\,A = 1$

$bc - ad = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = 0 \Rightarrow$ es ex. keine Inverse zu A.