Übungen mit CAS

WGY13
MLK, 2.12.21

Aufgabe 1 (Rangkriterien mit Parameter)

Ermitteln Sie, für welche reellen Zahlen anstelle von a die Matrizengleichung eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar oder unlösbar ist. (Sie müssen die Lösungen nicht angeben!) Begründen Sie Ihre Antworten!

a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & -3 \\ -8 & 6 & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ mit ref (A|b) als 3x4-Matrix auf Diagonalform bringen und Rg(A) mit Rg(A|b) vergleichen ⇒ Aussage über Anzahl Lösungen; evtl. Fallunterscheidung nötig (z.B. $a=0$, $a \neq 0$)

Buch S. 549, Nr. 8b

d) Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen drei Zwischenprodukte her und daraus drei Endprodukte. Folgende Stücklisten sind gegeben:

	Z1	Z2	Z3		E1	E2	E3
R1	2	5	1	R1	19	41	54
R2	3	4	2	R2	22	43	61
R3	6	8	2	R3	42	76	104

1.) Ein Kunde bestellt 200 Z1, 150 Z2 und 400 Z3 und ein anderer Kunde bestellt 250 E1, 80 E2 und 125 E3. Ermitteln Sie den gesamten Rohstoffbedarf für beide Bestellungen.

2.) Ermitteln Sie B_{ZE}. Zur Kontrolle: $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Vorgehen 1) $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ und $C_{RE} = \begin{pmatrix} 19 & 41 & 54 \\ 22 & 43 & 61 \\ 42 & 76 & 104 \end{pmatrix}$

im CAS definieren arz:=( ) cre:=( )

$$A_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 400 \end{pmatrix} + C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 80 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 2000 \\ 3200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14780 \\ 16565 \\ 29580 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16330 \\ 18565 \\ 32780 \end{pmatrix}$$

Antwort: Der Rohstoffbedarf beträgt ....

d) Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen drei Zwischenprodukte her und daraus drei Endprodukte. Folgende Stücklisten sind gegeben:

	Z1	Z2	Z3		E1	E2	E3
R1	2	5	1	R1	19	41	54
R2	3	4	2	R2	22	43	61
R3	6	8	2	R3	42	76	104

1.) Ein Kunde bestellt 200 Z1, 150 Z2 und 400 Z3 und ein anderer Kunde bestellt 250 E1, 80 E2 und 125 E3. Ermitteln Sie den gesamten Rohstoffbedarf für beide Bestellungen.

2.) Ermitteln Sie B_{ZE}. Zur Kontrolle: $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

$$A_{RZ} \cdot B_{ZE} \cdot A_{RZ}^{-1} = C_{RE} \cdot A_{RZ}^{-1}$$

geht nicht, da A_{RZ} und A_{RZ}^{-1} nicht nebeneinander stehen!

Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE} \quad | \cdot A_{RZ}^{-1}$ v. links

$$\Leftrightarrow \underbrace{A_{RZ}^{-1} \cdot A_{RZ}}_{=E} \cdot B_{ZE} = A_{RZ}^{-1} \cdot C_{RE} \Leftrightarrow B_{ZE} = A_{RZ}^{-1} \cdot C_{RE}$$

$$\Leftrightarrow B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

✓

3.) Es gilt nun $C_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ein Kunde bestellt 137,5 ME E1, 65 ME E2 und 75 ME E3, ein weiterer Kunde bestellt 115 ME E1, 110 ME E2 und 30 ME E3. Zeigen Sie, dass für beide Bestellungen dieselben Rohstoffmengen benötigt werden, und bestimmen Sie eine weitere Bestellmengenkombination, für die ebenfalls diese Rohstoffmengen benötigt werden.

Gesucht ist weiterer Mengenvektor für Endprodukte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ansatz: $C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 760 \\ 480 \\ 620 \end{pmatrix}$

mit ref oder rref oder linsolve

empfohlen

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c1+200}{2} \\ -(c1-140) \\ c1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow C_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ definieren im CAS

Bestellung 1

$$C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 137{,}5 \\ 65 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 760 \\ 480 \\ 620 \end{pmatrix}$$

Bestellung 2

$$C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 110 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 760 \\ 480 \\ 620 \end{pmatrix}$$

„Zeigen Sie, ..." erledigt ✓

Das LGS lautet

$$\left| \begin{array}{l} 2x + 4y + 3z = 760 \\ 2x + 2y + 1z = 480 \\ 2x + 3y + 2z = 620 \end{array} \right|$$

mit linsolve

Lösung des LGS ist

$$\begin{pmatrix} \frac{c_1 + 200}{2} \\ -(c_1 - 140) \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Mathematisch gibt es unendlich viele Lösungen, ökonomisch muss aber gelten $x, y, z \geq 0$, da x, y und z für Mengen stehen, die nicht negativ sein dürfen!

z.B. $c_1 = 100 \Rightarrow \begin{pmatrix} 150 \\ 40 \\ 100 \end{pmatrix}$ ist ökon. sinnvolle Lösung

aber $c_1 = -100 \Rightarrow \begin{pmatrix} 50 \\ 240 \\ -100 \end{pmatrix}$ ist nur mathematisch sinnvoll, da $z < 100$.

Definitionsbereich für c_1 ist die Menge aller Zahlen, so dass $x, y, z \geq 0$ gilt!

Wie macht man das?

$$\begin{pmatrix} \frac{c_1+200}{2} \\ -(c_1-140) \\ c_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} \frac{c_1+200}{2} \geq 0 \iff c \geq -200 \\ -(c_1-140) \geq 0 \iff c_1 \leq 140 \\ c_1 \geq 0 \end{array}$$

solve$\left(\frac{c1+200}{2} \geq 0, c1\right)$

solve$\left(-(c1-140) \geq 0, c1\right)$

Alle Einschränkungen für c_1 müssen alle 3 Ungleichungen erfüllen

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \geq -200 \\ c_1 \leq 140 \\ c_1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq c_1 \leq 140 \quad \text{ist Definitionsbereich}$$

3.) Im Folgenden ist der Parameter t ein produktionsbedingter Parameter, der auf die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C_{RE} Einfluss nimmt:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 4+t & 3 \\ 2 & 2-t & 1 \\ 2 & 3 & 4-2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Geben Sie den sinnvollen Definitionsbereich von t bezüglich der Matrix C_{RE} an.

$\rightarrow$ In C_{RE} stehen <u>Mengen</u>, also müssen alle Einträge größer oder gleich 0 sein.

$$\left.\begin{aligned} 4+t \geq 0 &\iff t \geq -4 \\ 2-t \geq 0 &\iff t \leq 2 \\ 4-2t \geq 0 &\iff t \leq 2 \end{aligned}\right\} -4 \leq t \leq 2$$

ist Definitionsbereich für t

alle mit solve lösen

4.) Im Lager befinden sich noch 2000 ME von R1, 900 ME von R2 und 2250 ME von R3. Bestimmen Sie den sinnvollen Definitionsbereich für t bezüglich der Produktionsmengen.

5.) Bestimmen Sie den sinnvollen Definitionsbereich für t bezüglich der Matrix C_{RE} **<u>und</u>** der Produktionsmengen.

c) Die Bilster Möbel GmbH stellt aus drei verschiedenen Bauteilen B1, B2, B3 drei Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3 und aus diesen wiederum drei Endprodukte (die Schreibtische E1, E2, E3) her. Die Materialverflechtung ist den folgenden Matrizen zu entnehmen:

$$A_{BZ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C_{BE} = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 2 \\ 16 & 18 & 12 \\ 16 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Kosten und Verkaufspreise ergeben sich aus den folgenden Tabellen:

Kosten der Bauteile GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte GE/ME			Verkaufspreise der Endprodukte GE/ME		
B1	B2	B3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3	E1	E2	E3
1	2	3	2,5	3,3	2	17	23	19	150	145	90

1.) Interpretieren Sie die Bedeutung des Elements c_{32} in der Matrix C_{BE} im Sachzusammenhang.
2.) Ein Kunde bestellt jeweils 100 ME von E1, E2 und E3. Berechnen Sie den Deckungsbeitrag für diesen Auftrag.

2) gesucht: DB = Verkaufspreis − Stückkosten

Rohstoffkosten
+ Zwischenproduktkosten
+ Endproduktkosten

= Stückkosten