Problemstellung: Ein Landwirt plant, höchstens 22 Hektar seiner Ackerflächen mit Weizen und Gemüse zu bebauen. Der Arbeitsaufwand pro Hektar Weizen beträgt 4 Tage, der pro Hektar Gemüse 24 Tage. Insgesamt stehen ihm nicht mehr als 240 Arbeitstage zur Bewirtschaftung der Fläche zur Verfügung. An Kapital können höchstens 11.200 € eingesetzt werden. Dabei beträgt der Kapitalaufwand 400 € pro Hektar Weizen und 800 € pro Hektar Gemüse.

Der Landwirt möchte unter den genannten Anbaubedingungen maximalen Gewinn erzielen, wobei er pro Hektar Weizen mit 500 € Gewinn und pro Hektar Gemüse mit 1.250 € Gewinn rechnet.

Aufgabe: Überlegen Sie gemeinsam in einer Kleingruppe oder zu zweit eine mögliche Lösung, die einerseits für einen möglichst hohen Gewinn sorgt, andererseits aber auch alle Restriktionen (Einschränkungen) berücksichtigt.

Beispiellösung zur Orientierung: Der Landwirt baut 5 Hektar Weizen ($x = 5$) und 7 Hektar Gemüse ($y = 7$) an.

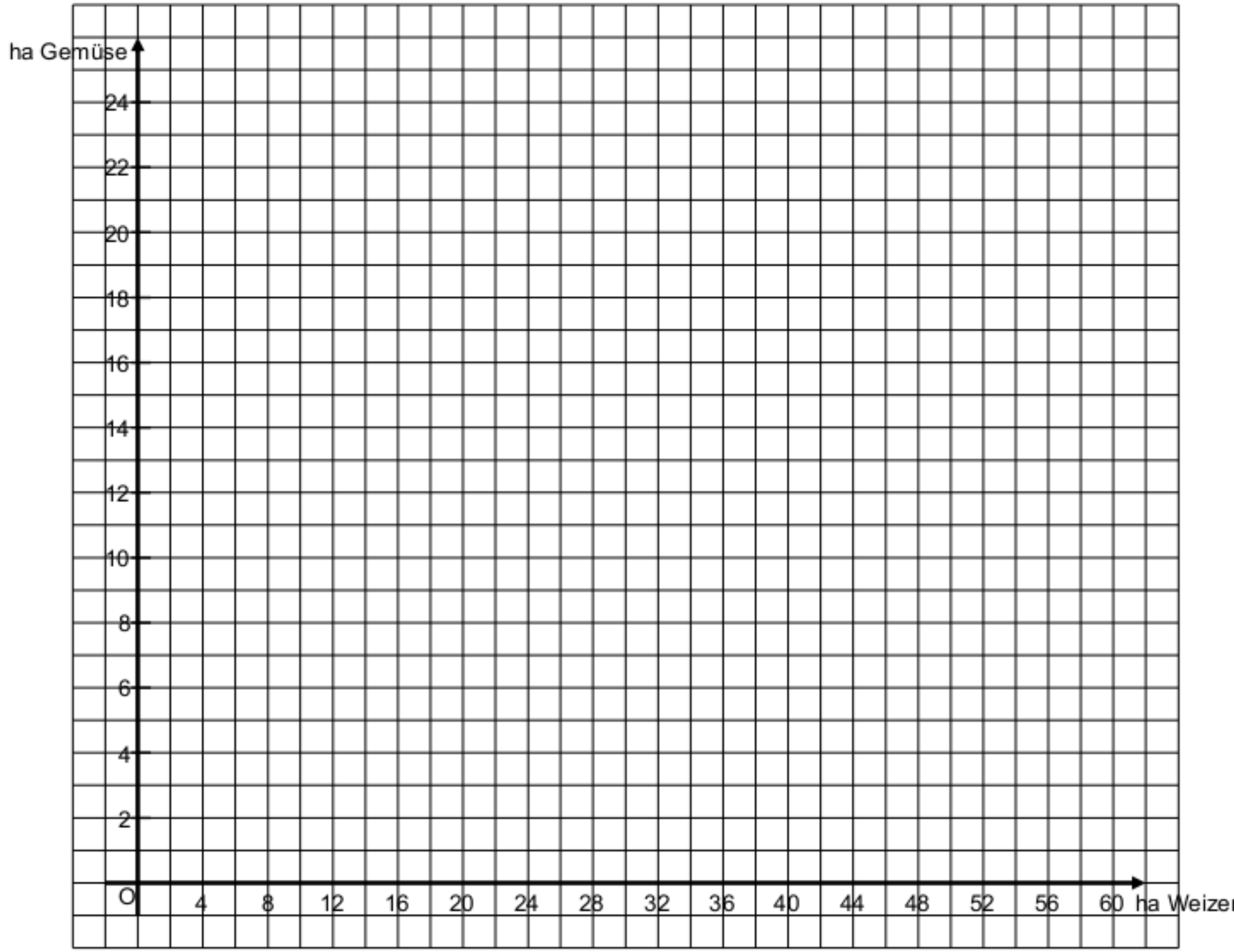
Überprüfung der Einschränkungen:

- Gesamtfläche: $5 + 7 = 12 \leq 22$ ☺
- Arbeitsaufwand: $4 \cdot 5 + 24 \cdot 7 = 188 \leq 240$ ☺
- Kapital: $400 \cdot 5 + 800 \cdot 7 = 7.600 \leq 11.200$ ☺

⇨ Alle Einschränkungen werden beachtet.

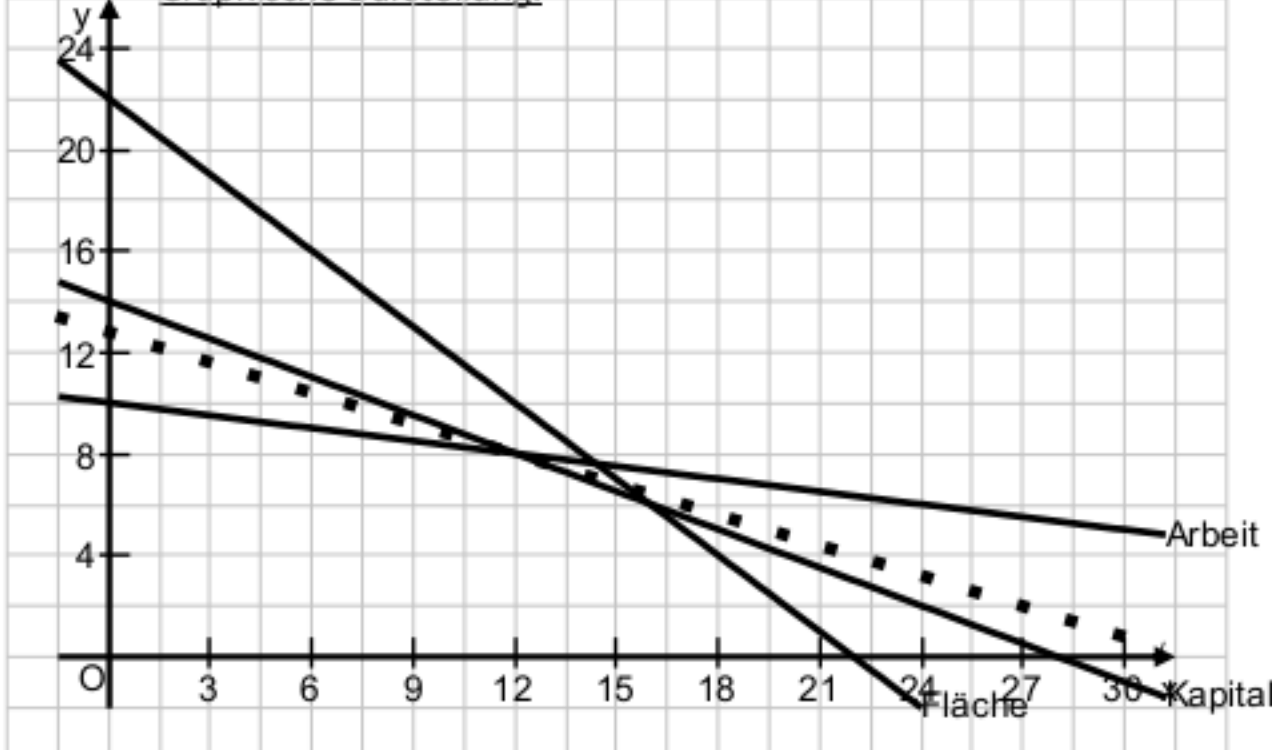
Berechnung des Gewinns: $G = 500 \cdot 5 + 1.250 \cdot 7 = 11.205$

Der Gewinn beträgt bei dieser Kombination von Anbauflächen genau 11.200 €. Finden Sie eine bessere Lösung? Tragen Sie Ihren Vorschlag als Punkt im Koordinatensystem ein.



ha Gemüse
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
O
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44
48
52
56
60
ha Weizen

Graphische Darstellung:



Eckpunkte des zulässigen Bereichs (im Uhrzeigersinn)

A (0/0)

B (0/10) y-Abschnitt Arbeit

C (12/8) Schnittpunkt Arbeit / Kapital

D (16/6) Schnittpunkt Kapital / Fläche

E (22/0) Nullstelle Fläche

Zielfunktion: G: Gewinn in Euro => G = 500x + 1250y -> max -> y = $\frac{G}{1250} - \frac{500}{1250}x$

(Geradenschar mit Steigung m = -500/1250 = -0,4)

Schieben der Gerade durch Eckpunkte bis zum größten y-Abschnitt:

eingezeichnet bei G=16000 => y-Abschnitt von 16000/1250=12,8

E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info Homepage: http://www.mathekannjeder.de

Rechnerisch: Einsetzen der Koordinaten der Eckpunkte in Zielfunktion

A (0/0): G = 500 · 0 + 1250 · 0 = 0

B (0/10): G = 500 · 0 + 1250 · 10 = 12500

C (12/8): G = 500 · 12 + 1250 · 8 = 16000

D (16/6): G = 500 · 16 + 1250 · 6 = 15500

E (22/0): G = 500 · 22 + 1250 · 0 = 11000

Zusammenfassung:

Der maximale Gewinn von 16.000 € wird erreicht bei einem Anbau von 12 ha Weizen und 8 ha Gemüse. Die Geradengleichung der Zielfunktion lautet dann $y = \frac{16000}{1250} - \frac{500}{1250}x = 12{,}8 - 0{,}4x$

Ähnliche Übung dazu; S. 628, Nr. 3a nur zeichnerisch (ohne Simplex)

Weitere Übungen mit Lösungen:

Seite 591, Nr. 8: Maximaler Gewinn: 640 Euro, bei 40 Stück P_1 und 50 Stück P_2.
Koordinatensystem: x-Achse: 0 – 140 und y-Achse: 0 – 100

Eckpunkte (0/0), (0/70), (40/50), (60/25), (60/0)

Seite 591, Nr. 10: Maximale Einnahmen: 2080 €, bei 40 Wohnwagenplätzen und 70 Zeltplätzen

Koordinatensystem: x-Achse: 0 – 100 und y-Achse: 0 – 150

Eckpunkte (0/0), (0/120), (40/70), 60/30), (60/0)

Seite 591, Nr. 11: Maximale Gewinn: 14400 €, bei 120 Stück nach Verfahren A und 0 Stück nach Verfahren B

Koordinatensystem: x-Achse: 0 – 160 und y-Achse: 0 – 240

Eckpunkte (0/0), (0/100), (40/80), (120/0)

Seite 591, Nr. 12: Maximaler Gewinn: 1080 Euro, bei 40 Stück A und 60 Stück B.
Koordinatensystem: x-Achse: 0 – 150 und y-Achse: 0 - 180

Eckpunkte (0/0), (0/80), (40/60), (80/20), (90/0)

Verfahren mit CAS und Dokumentation im Heft

1. Entscheidungsvariablen festlegen und Nichtnegativitätsbedingung notieren (im Heft)

2. Restriktions**ungleichungen** aufstellen und nach y = … auflösen (im Heft)

3. Restriktions**gleichungen** eingeben und plotten lassen (CAS) → rechnerisch: y-Abschnitt und Nullstellen ermitteln

4. Übertragen des Koordinatensystems aus dem CAS (im Heft)

5. Eckpunkte im Koordinatensystem markieren und notieren (entweder ablesen, selbst ausrechnen oder im CAS anzeigen lassen) (im Heft)

6. Zielgröße Z (je nach Aufgabe andere sinnvolle Bezeichnung) festlegen und Zielfunktion aufstellen Z = …., dann nach y = … umformen (im Heft)

1. Möglichkeit zum weiteren Vorgehen

7. Im CAS Schieberegler einführen und Zielfunktion plotten lassen und durch Schieberegler durch Eckpunkte schieben (CAS)

8. Wert des Schiebereglers ablesen entsprechende Zielfunktionsgleichung notieren und einzeichnen (im Heft)

9. Zusammenfassende Antwort mit allen relevanten Informationen formulieren (im Heft)

2. Möglichkeit zum weiteren Vorgehen

7. Koordinaten der Eckpunkte in Zielfunktion Z = … einsetzen und alle Werte für Z vergleichen. Maximum ermitteln und entsprechende Geradengleichung aufstellen und einzeichnen (im Heft)

8. *optional: Kontrolle der Ergebnisse aus 7. mit CAS*

9. Zusammenfassende Antwort mit allen relevanten Informationen formulieren (im Heft)

S. 628, Nr. 3

1) Entscheidungvariable : x : ha Freiland   y : ha überdacht

↳ Nichtnegativitätsbedingung : $x, y \geq 0$

2) Restriktionen (Einschränkungen)

I Fläche : $x + y \leq 5 \longrightarrow y = 5 - x$

II Tage : $40x + 240y \leq 420 \longrightarrow 240y = 420 - 40x \mid :240 \rightarrow y = 1{,}75 - \frac{1}{6}x$

III Kapital : $800x + 2400y \leq 4800 \rightarrow 2400y = 4800 - 800x \mid :2400 \rightarrow y = 2 - \frac{1}{3}x$

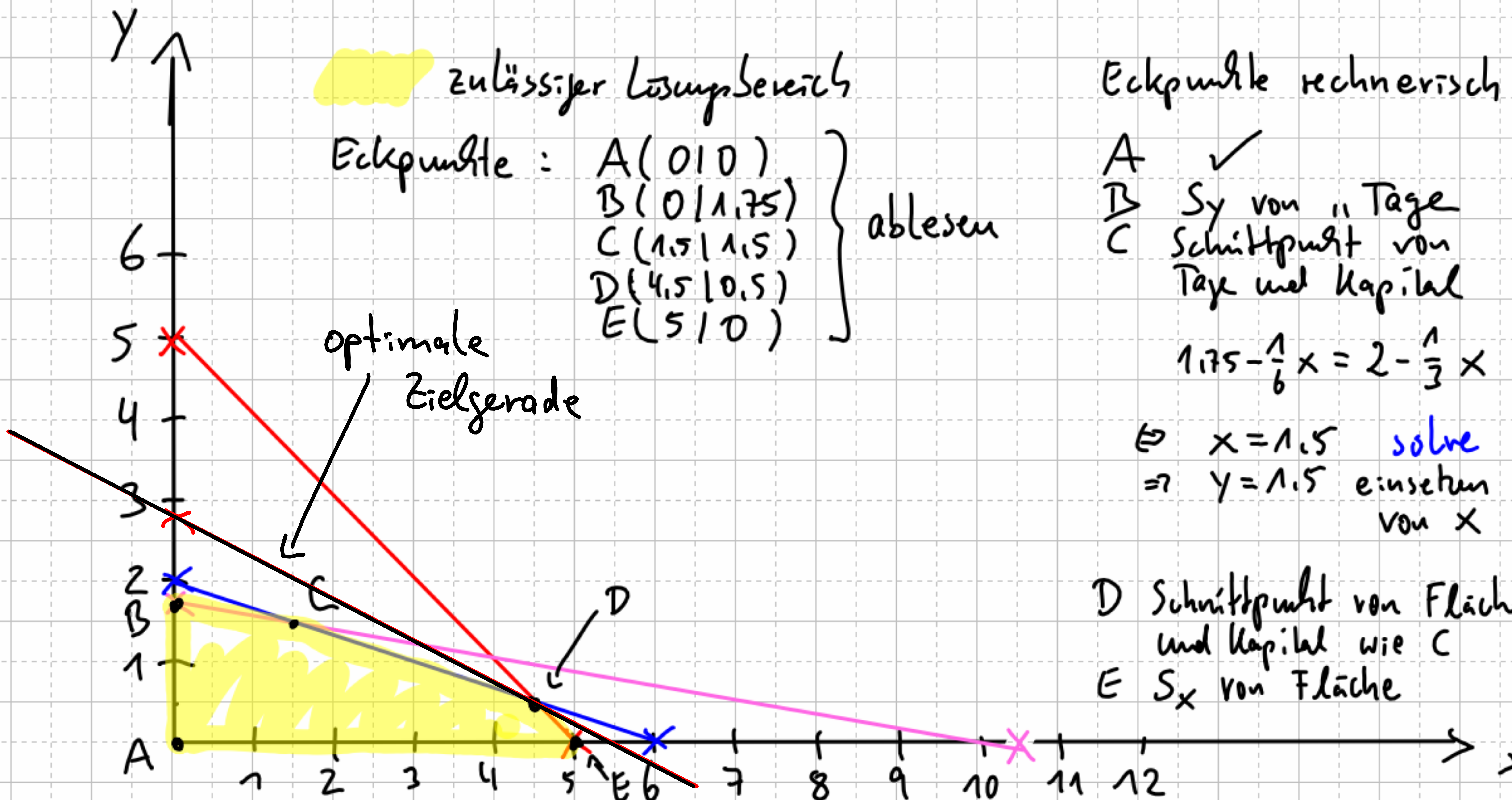
3) Von den Geraden y-Abschnitte und Nullstellen ermitteln

I) $y = 5 - x$ y-Abschnitt : 5   Nullstelle $y = 0 \Leftrightarrow 5 - x = 0 \Leftrightarrow \underline{5 = x}$

II) $y = 1{,}75 - \frac{1}{6}x$ y-Abschnitt : 1,75   Nullstelle $y = 0 \Leftrightarrow 1{,}75 - \frac{1}{6}x = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 10{,}5}$

III) $y = 2 - \frac{1}{3}x$ y-Abschnitt : 2   Nullstelle $y = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 6}$

4) Geraden zeichnen (z.B mit y-Abschnitt und Nullstelle)



Eckpunkte: $A(0|0)$, $B(0|1{,}75)$, $C(1{,}5|1{,}5)$, $D(4{,}5|0{,}5)$, $E(5|0)$ } ablesen

Eckpunkte rechnerisch

A ✓

B S_y von „Tage"

C Schnittpunkt von Tage und Kapital

$$1{,}75 - \frac{1}{6}x = 2 - \frac{1}{3}x$$

$\Leftrightarrow x = 1{,}5$ solve

$\Rightarrow y = 1{,}5$ einsetzen von x

D Schnittpunkt von Fläche und Kapital wie C

E S_x von Fläche

Einsetzen von D(4,5|0,5)

$$G = 1000x + 2000y \rightarrow max$$

$\leftarrow$ G: Gewinn in €

$\Leftrightarrow G = 1000 \cdot 4{,}5 + 2000 \cdot 0{,}5$

$\Leftrightarrow G = 5500€$ $\rightarrow$ maximaler Gewinn

A(0|0) ⇒ G = 0
B(0|1,75) ⇒ G = 3500
C(1,5|1,5) ⇒ G = 4500
D(4,5|0,5) ⇒ G = 5500
E(5|0) ⇒ G = 5000

A: Den maximalen Gewinn von 5500€ erreicht der landw. Betrieb, mit 4,5 ha Freiland u. 0,5 ha überdachtem Land.

Ermittlung der optimalen Zielgerade

$G = 1000x + 2000y \quad | -1000x \rightarrow$ nach y auflösen

$\Leftrightarrow G - 1000x = 2000y \quad | :2000$

$\Leftrightarrow \frac{G}{2000} - \frac{1}{2}x = y$

y-Abschnitt : $\frac{G}{2000}$

Steigung : $-\frac{1}{2}$

Die Zielgeraden haben alle eine Steigung von $-\frac{1}{2}$ und einen y-Abschnitt, der von G abhängt, nämlich $\frac{G}{2000}$.

Die optimale Gerade hat bei dieser Aufgabe also eine Steigung von $-\frac{1}{2}$, geht durch den Punkt D $(4{,}5 \mid 0{,}5)$ und hat den y-Abschnitt $\frac{5500}{2000} = 2{,}75$.

$$\boxed{y = 2{,}75 - \frac{1}{2}x}$$