

W6Y13, MLK, 24.01.22

Stochastische Matrizen

Zusammenfassung:

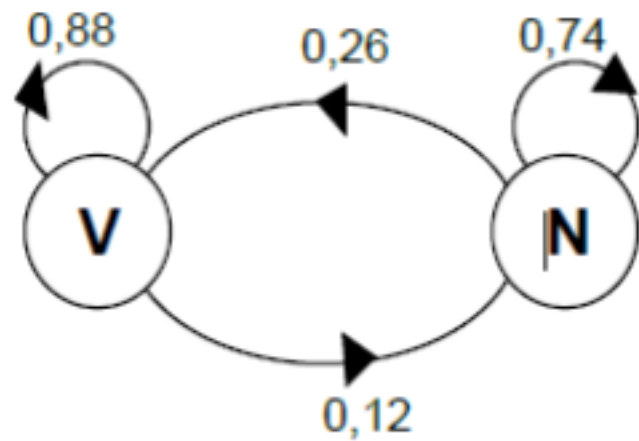
- 1) Für eine stochastische Matrix S und eine Anfangsverteilung v_0 existiert (in der Regel) eine Grenzmatrix $G = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n$
- 2) Die Existenz einer Grenzmatrix G hat die Existenz eines Fixvektors v^* zur Folge, d.h. die Gleichung $S \cdot v^* = v^*$ ist lösbar und das System geht irgendwann in einen stabilen Zustand über.

$$\text{Lösen von } S \cdot v^* = v^* \Leftrightarrow S \cdot v^* = E \cdot v^* \Leftrightarrow S \cdot v^* - E \cdot v^* = 0$$

$$\Leftrightarrow (S - E) \cdot v^* = 0 \text{ ist lösbar}$$

Aufgabe 1

In der Schulmensa gibt es zwei Essensangebote. Es gibt ein vegetarisches Gericht (V) und ein nichtvegetarisches Gericht (N). Es kommt vor, dass die Schülerinnen und Schüler von Tag zu Tag zwischen den Angeboten wechseln. Das Übergangendiagramm stellt diesen Wechsel dar.



Am Montag wählen 100 Schüler das vegetarische und 200 Schüler das nichtvegetarische Gericht.

- Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Essen für Dienstag, Mittwoch, Donnerstag und Freitag. Berechnen Sie dabei die Anzahl der Essen für Dienstag „von Hand“.
- Prüfen Sie, ob es einen Fixvektor v^* gibt. Ein anderer Begriff, der auch häufig verwendet wird, ist „Grenzverteilung“. Für die Grenzverteilung oder den Fixvektor gilt $S \cdot v^* = v^*$.
- Manchmal existiert eine Grenzmatrix G für die stochastische Matrix S und es gilt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n = G$. Überprüfen Sie, ob eine solche Grenzmatrix existiert, indem Sie verschiedene „hohe“ Potenzen für S berechnen und die Ergebnisse vergleichen.

$$S = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,26 \\ 0,12 & 0,74 \end{pmatrix}$$

$$S \cdot v^* = v^* = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,26 \\ 0,12 & 0,74 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (S - E) \cdot v^* = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,12 & 0,26 \\ 0,12 & -0,26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,12x + 0,26y = 0 \\ +0,12x - 0,26y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{⊛}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} S^n = \begin{pmatrix} 0,684 & 0,684 \\ 0,316 & 0,316 \end{pmatrix} = G$$

⊛ mit CAS $v^* = \begin{pmatrix} 2,1\bar{6} \cdot c \\ c \end{pmatrix}$ math. unendlich viele Lösungen

$$v^* = \begin{pmatrix} 2,1\bar{6} \cdot c \\ c \end{pmatrix}$$

$x = 2,1\bar{6} \cdot c \hat{=}$ Anzahl Personen, die vegetarisch essen

$y = c \hat{=}$ " " " nicht-vegetarisch essen

Es essen 1000 Personen in der Mensa

$$\hookrightarrow x + y = 1000 \Leftrightarrow 2,1\bar{6} \cdot c + c = 1000 \Leftrightarrow c = 315,457$$

$$\Rightarrow y \approx 315 \wedge x = 2,1\bar{6} \cdot 315 \approx 685 \Rightarrow v^* \approx \begin{pmatrix} 685 \\ 315 \end{pmatrix}$$