

WGY13, NLK, 27.01.22

Stochastische Matrizen

Fragestellung: Kann man aus einem Zustand bzw. einer Verteilung der Markov-Kette auf den vorherigen Zustand schließen?

Bsp: $S \cdot v_2 = v_3$ v_3 bekannt, v_2 gesucht

$$S \cdot v_2 = v_3 \quad | \cdot S^{-1} \text{ v.l.} \Leftrightarrow \underbrace{S^{-1} \cdot S}_{=E} \cdot v_2 = S^{-1} \cdot v_3 \Leftrightarrow v_2 = S^{-1} \cdot v_3$$

Allgemein: $v_n = S^{-1} \cdot v_{n+1}$, falls S^{-1} existiert

Erinnerung: S^{-1} existiert, falls S vollen Rang hat ($\text{Rg}(S) = \text{Zeilenzahl } m$)

Falls S^{-1} nicht existiert, ist der Zustand v_{n+1} aus keinem Zustand erreichbar!

Aufgabe 3

Laut einer Untersuchung des Deutschen Instituts für Touristik blieben im vergangenen Jahr 25 % der Bevölkerung im Urlaub zu Hause (H), 42 % verreisten innerhalb von Deutschland (D) und 33 % verbrachten ihren Urlaub im Ausland (A). Die untenstehende Tabelle beschreibt das Wechselverhalten der deutschen Urlauber von Jahr zu Jahr.

	Von H	Von D	Von A
nach H	0,3	0,3	0,1
nach D	0,2	0,6	0,5
nach A	0,5	0,1	0,4

- Erläutern Sie die Bedeutung der Einträge 0,6 und 0,4 im Sachkontext.
- Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Urlauber, die zu Hause bleiben, den Urlaub in Deutschland und im Ausland verbringen für das aktuelle Jahr.
- Bestimmen Sie die Anzahlen für weitere zwei Jahre.
- Berechnen Sie die Übergangsmatrix S^2 . Vergleichen Sie diese mit S .
- Bestimmen Sie S^5 , S^{10} , S^{15} , S^{20} und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

~~X~~ Bestimmen Sie $S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix}$ und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.

$$f) S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 75 \\ -50 \end{pmatrix}$$

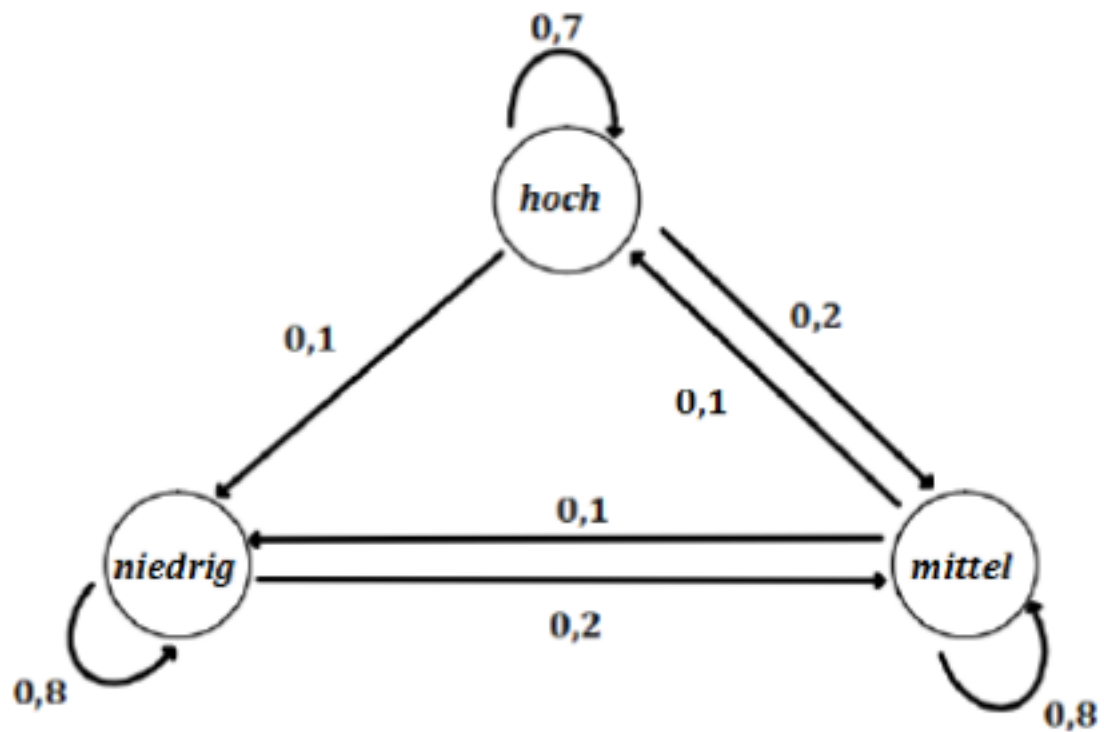
Im Sachkontext bedeutet das Ergebnis, dass der Zustand

$\begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix}$ nicht zu erreichen ist,

da der dazu notwendige vorherige Zustand eine negative Zahl erhält. Das darf aber im Sachkontext nicht der Fall sein!

In einem kleinen Land gibt es ca. 1.000.000 Erwerbstätige, die vom Finanzamt jährlich einer der drei Einkommensgruppen 'niedrig', 'mittel' und 'hoch' zugeordnet werden.

Es hat sich im Laufe der Jahre gezeigt, dass es zwischen diesen Gruppen von Jahr zu Jahr Verschiebungen gibt. Das untenstehende Übergangendiagramm beschreibt diese Verschiebungen von Jahr zu Jahr.



Von → n m h.
 nach ↓ h
 m
 h

a) $S = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$

quadratisch 3x3 ✓

Einträge aus [0;1] ✓

Spaltensummen 1 ✓

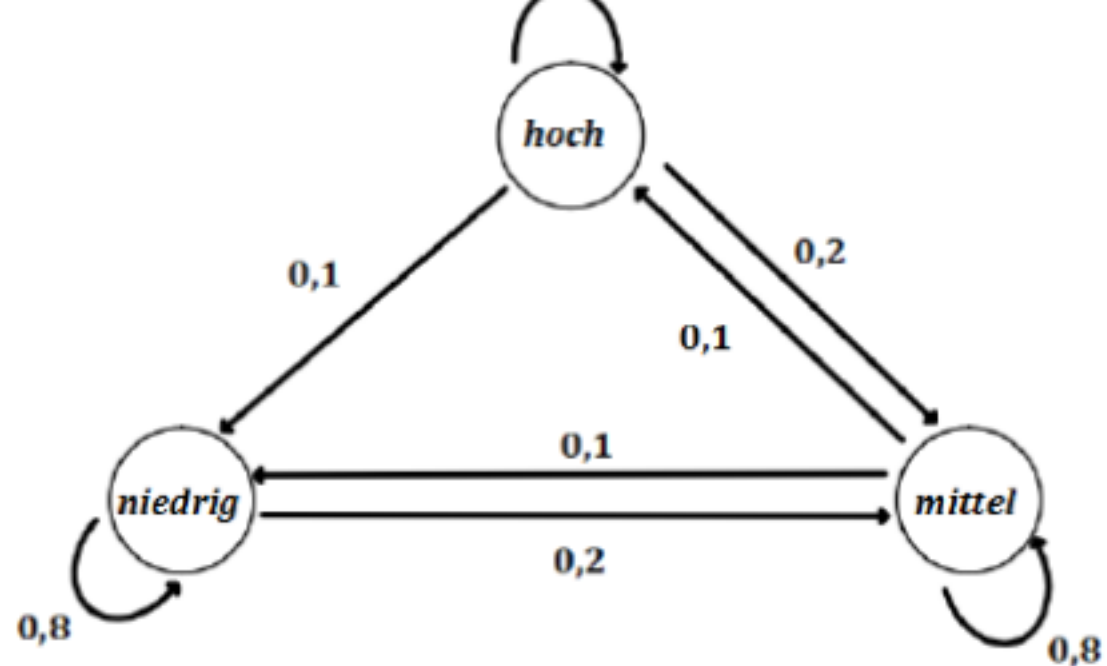
b) $V_0 = \begin{pmatrix} 200\ 000 \\ 700\ 000 \\ 100\ 000 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 240\ 000 \\ 620\ 000 \\ 140\ 000 \end{pmatrix}$

Am Anfang befinden sich 200.000 Erwerbstätige in der Gruppe *niedrig*, 700.000 Erwerbstätige in der Gruppe *mittel* und 100.000 Erwerbstätige in Gruppe *hoch*.

- a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix S und begründen Sie, warum S eine stochastische Matrix ist.
- b) Berechnen Sie die Anzahl der Erwerbstätigen, die sich im nächsten Jahr in den Einkommensgruppen befinden.
- c) Bestimmen Sie die Gruppenstärken für weitere zwei Jahre.
- d) Berechnen Sie die Übergangsmatrix S². Vergleichen Sie diese mit S.
- e) Bestimmen Sie S⁵, S¹⁰, S¹⁵, S²⁰ und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.
- f) Ermitteln Sie, falls sie existieren, eine Grenzverteilung und eine Grenzmatrix.

c) $V_2 = \begin{pmatrix} 268\ 000 \\ 572\ 000 \\ 160\ 000 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 287\ 600 \\ 543\ 200 \\ 169\ 200 \end{pmatrix}$

g) Bestimmen Sie $S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 200000 \\ 700000 \\ 100000 \end{pmatrix}$ und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.



Am Anfang befinden sich 200.000 Erwerbstätige in der Gruppe *niedrig*, 700.000 Erwerbstätige in der Gruppe *mittel* und 100.000 Erwerbstätige in Gruppe *hoch*.

- Bestimmen Sie die Übergangsmatrix S und begründen Sie, warum S eine stochastische Matrix ist.
- Berechnen Sie die Anzahl der Erwerbstätigen, die sich im nächsten Jahr in den Einkommensgruppen befinden.
- Bestimmen Sie die Gruppenstärken für weitere zwei Jahre.
- Berechnen Sie die Übergangsmatrix S^2 . Vergleichen Sie diese mit S .
- Bestimmen Sie S^5 , S^{10} , S^{15} , S^{20} und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.
- Ermitteln Sie, falls sie existieren, eine Grenzverteilung und eine Grenzmatrix.
- Bestimmen Sie $S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 200000 \\ 700000 \\ 100000 \end{pmatrix}$ und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.

$$d) \quad S = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,17 & 0,17 \\ 0,32 & 0,68 & 0,32 \\ 0,02 & 0,15 & 0,51 \end{pmatrix}$$

$$f) \quad G = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,33 & 0,33 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,17 & 0,17 & 0,17 \end{pmatrix}$$

$$V^x = \begin{pmatrix} 333 & 333 \\ 500 & 000 \\ 170 & 000 \end{pmatrix}$$

4g)

$$S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 200\ 000 \\ 700\ 000 \\ 100\ 000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142\ 857 \\ 833\ 333 \\ 23\ 810 \end{pmatrix}$$

Im Jahr vor dem Zustand $\begin{pmatrix} 200\ 000 \\ 700\ 000 \\ 100\ 000 \end{pmatrix}$ waren

142 857 Personen in der niedriger Einkommensgruppe, 833 333 in der mittleren Einkommensgruppe und 23 810 in der hohen Einkommensgruppe.