WGY13, MLK, 7.2.22

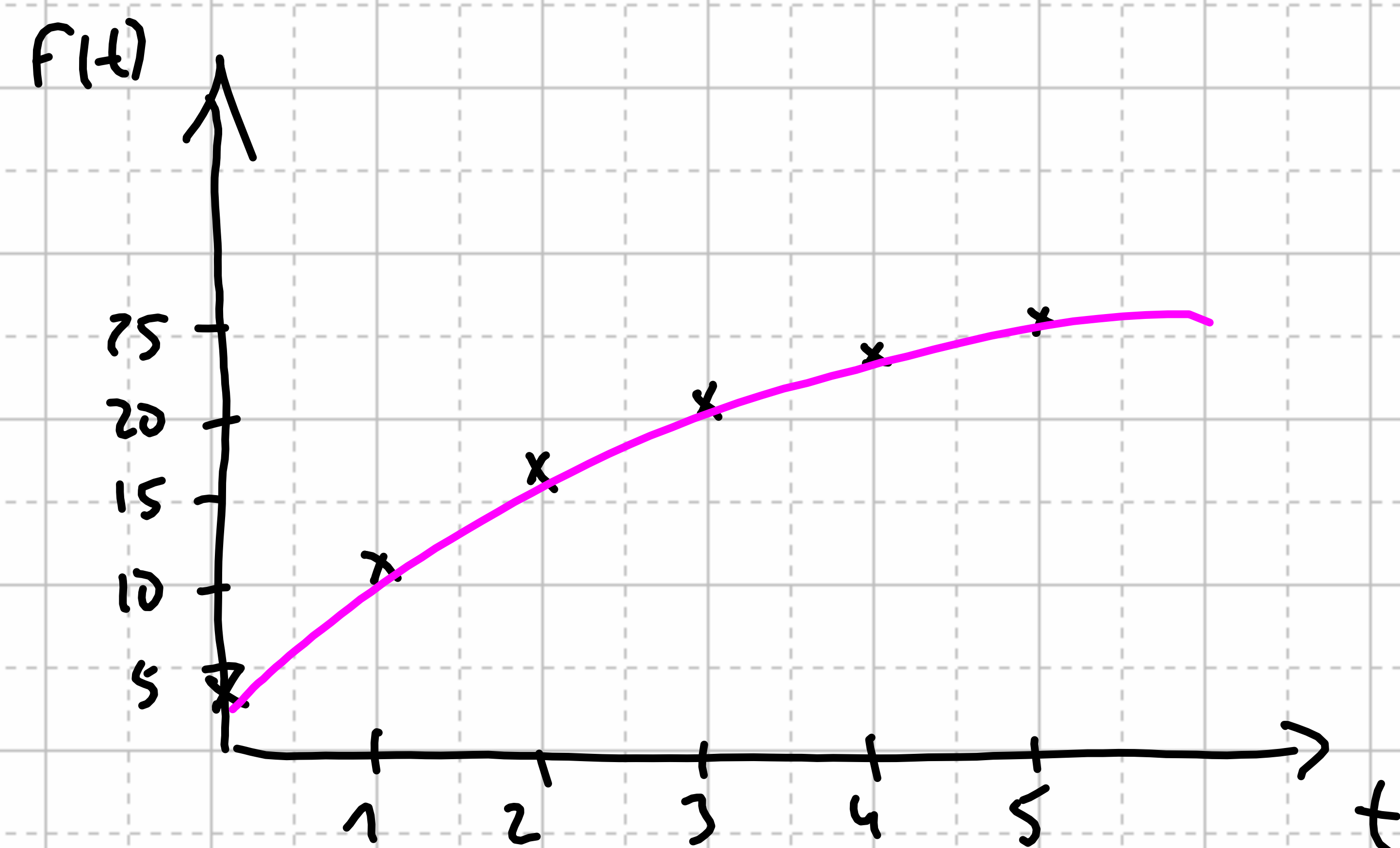
Regression

Abitur 2020, LK, CAS

2.3.1

t	0	1	2	3	4	5	Monat
f(t)	4	11,5	17,1	21,3	24,3	26,2	ME/Monat

Skizze



Vorgehen

1) Neues Dokument → 4 List & Spreadsheets

Überschriften in oberster Zeile A, B, C ...

hier: A → t   B → me

2) Werte aus Aufgabe eingeben

3) a) Rechnerisch in C1 → menu → 4 Statistik → 1 Stat. Berechn.

→ Regression auswählen → X-Liste Überschrift auswählen hier: t
Y-Liste " " hier: me

→ Werte der Regressionsfunktion werden angegeben inkl. R^2-Wert

3) b) Graphisch: ctrl + doc (+page) → 5 Data & Statistics → Achsen-beschriftungen auswählen → menu → 4 Analysieren → 6 Regression → Regr. auswählen

Ergebnisse (rechnerisch)

Titel	Kubische Regression	Exponentielle Regression
RegEqn	$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$	$a \cdot b^x$
a	0,042593	6,359
b	-1,00516	1,4034
c	8,40066	
d	4,01508	
R^2	0,999983	0,803687

Regression Equation

Regressionsgleichung

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(t) = 6{,}359 \cdot 1{,}4034^x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(t) = 0{,}043x^3 - 1{,}005x^2 + 8{,}4x + 4{,}015}$$

Der R^2-Wert der kubischen Regression liegt deutlich näher an 1 und damit ist die kubische Regression besser geeignet als die exponentielle Regression.

Übung: Abi 2021, LK, CAS

2.1.

$$G(x) = -0{,}099x^3 + 0{,}4547x^2 + 0{,}519x - 1{,}47$$

$$R^2 = 0{,}99962$$

$\Rightarrow$ Der R^2-Wert ist fast 1, d.h. die kubische Regressionsfunktion beschreibt den Gewinnverlauf sehr gut!

Herleitung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

Ansatz: $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ → $k(x)$

Es muss gelten: $a, c, d > 0$, $b < 0$

CAS

Weitere möglicherweise notwendige Funktionen:

Grenzkosten (erste Ableitung): $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$ → k1

Zweite Ableitung: $K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$ → k2

Stückkostenfunktion: $k(x) = K(x) / x = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + d/x$ → sk $= \frac{k(x)}{x}$

Erste Ableitung der Stückkostenfunktion: $k'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b - d/x^2$ → sk1

Variable Kosten: $K_V(x) = K(x) - K_{fix} = K(x) - d = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$ → kv

Variable Stückkostenfunktion: $k_V(x) = K_V(x) / x = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ → skv

Erste Ableitung der var. Stückkostenfunktion: $k_V'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ → skv1

Übersetzungshilfen:

- Die (Gesamt)kosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $K(p) = q$
- Die Grenzkosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $K'(p) = q$
- Bei p ME wechseln die Kostensteigerungen von degressiv zu progressiv => $K''(p) = 0$
- Bei p ME ist der Übergang von sinkenden Grenzkosten zu steigenden Grenzkosten => $K''(p) = 0$
- Bei p ME liegt der Wendepunkt von $K(x)$ => $K''(p) = 0$
- Die Stückkosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $k(p) = q$
- Die variablen Kosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $K_V(p) = q$
- Die var. Stückkosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $k_V(p) = q$
- Das Betriebsminimum liegt bei p ME => $k_V'(p) = 0$
- Das Betriebsoptimum liegt bei p ME => $k'(p) = 0$
- Die Fixkosten betragen q GE => $K(0) = q$

Vorgehen:

Aufstellen eines linearen Gleichungssystems mit vier Gleichungen (für jede Variable benötigt man eine Gleichung, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Das Gleichungssystem kann dargestellt werden als Gleichung $A \cdot x = b$, wobei A eine 4x4-Matrix ist und b der Lösungsvektor (als 4x1-Spaltenvektor). Der Vektor x ist ebenfalls ein 4x1-Spaltenvektor mit den Einträgen a,b,c und d.

Lösung des LGS mit dem Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix $x = A^{-1} \cdot b$.

CAS-Befehle: solve oder linsolve

Übungsaufgaben (frühere Abituraufgaben)

Aufgabe 1:

Bei der Produktion des LED-Leuchtmittels geht die ISERLED von einer ganzrationalen Kostenfunktion dritten Grades aus. Zur genaueren Bestimmung der Kostenfunktion liegen folgende Informationen vor:

- Bei einer Produktion von 4 ME belaufen sich die Gesamtkosten auf 48 GE.
- Bei einer Produktion von 8 ME ergeben sich variable Stückkosten in Höhe von 13 GE/ME.
- Bei einer Produktion von 6 ME belaufen sich die Grenzkosten auf 15 GE pro ME.
- Bei einer Produktion von 6 ME betragen die Stückkosten 11 GE pro ME.

Leiten Sie die Kostenfunktion her.

Aufgabe 2:

Die Pyrokomet GmbH stellt Feuerwerke aller Art her. Unter anderem werden Feuerwerksraketen, Tischfeuerwerke und Böllersortimente für unterschiedliche Anlässe – z. B. Hochzeiten – produziert. Der Produktentwickler erläutert, dass die Kosten zur Herstellung der Tischfeuerwerke mithilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modelliert werden können. Folgende Eckdaten liegen dazu vor:

- Bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME liegen die Gesamtkosten bei 270 GE.
- Das Betriebsminimum ergibt sich bei 10 ME.
- Die variablen Stückkosten in Höhe von 32 GE / ME werden bei einer Ausbringungsmenge von 20 ME erreicht.
- Die Grenzkosten bei 5 ME betragen 13,25 GE / ME.

Leiten Sie aus den Eckdaten die Gleichung der Kostenfunktion K her.

Aufgabe 3:

Die Rasolux GmbH produziert und vermarktet ein großes Sortiment an Gartengeräten und -maschinen. Darunter ist der Aufsitzmäher Goliath. Da Rasolux viele Mitbewerber hat, muss die GmbH als Polypolist ihre Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation aufmerksam verfolgen.

Die Unternehmensleitung möchte sich einen Überblick über die Kostenentwicklung bei unterschiedlichen Produktionsmengen des Aufsitzmähers Goliath verschaffen und geht von einem ertragsgesetzlichen Kostenverlauf aus.

- Die Fixkosten betragen 7 840 Geldeinheiten (GE).
- Bei einer Produktionsmenge von 2 Mengeneinheiten (ME) betragen die Gesamtkosten 10 800 GE und die Grenzkosten 1 080 GE / ME.
- Die variablen Stückkosten betragen 520 GE / ME, wenn 10 ME produziert werden.

Leiten Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion dritten Grades her.

Lösungen:

Aufgabe 1: $K(x) = 0{,}5\cdot x^3 - 5\cdot x^2 + 21\cdot x + 12$

Aufgabe 2: $K(x) = 0{,}15x^3 - 3x^2 + 32x + 100$

Aufgabe 3: $K(x) = 10x^3 - 240x^2 + 1920x + 7840$

1) $K(x) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$ CAS $k(x)$

$k_v(x) := \frac{K(x)-d}{x} = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ $skv(x) := \frac{k(x)-d}{x}$

$K'(x) := 3\cdot a x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$

↳ $k1(x) := \frac{d}{dx}(k(x))$

$k(x) := \frac{K(x)}{x} = ax^2 + b\cdot x + c + \frac{d}{x}$ $sk(x) := \frac{k(x)}{x}$

Math.:

$K(4) = 48$

$k_v(8) = 13$

$K'(6) = 15$

$k(6) = 11$

CAS:

$k(4) = 48$

$skv(8) = 13$

$k1(6) = 15$

$sk(6) = 11$

mit linsolve a= b= c= d=

$K(x) =$