Herleitung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

Ansatz: $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ k(x)

CAS

Es muss gelten: a, c, d > 0 , b < 0

Weitere möglicherweise notwendige Funktionen:

Grenzkosten (erste Ableitung): $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$ k1

Zweite Ableitung: $K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$ k2

Stückkostenfunktion: $k(x) = K(x) / x = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + d/x$ sk = $\frac{k(x)}{x}$

Erste Ableitung der Stückkostenfunktion: $k'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b - d/x^2$ sk1

Variable Kosten: $K_V(x) = K(x) - K_{fix} = K(x) - d = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$ kv

Variable Stückkostenfunktion: $k_V(x) = K_V(x) / x = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ skv

Erste Ableitung der var. Stückkostenfunktion: $k_V'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ skv1

Übersetzungshilfen:

- Die (Gesamt)kosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $K(p) = q$
- Die Grenzkosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $K'(p) = q$
- Bei p ME wechseln die Kostensteigerungen von degressiv zu progressiv => $K''(p) = 0$
- Bei p ME ist der Übergang von sinkenden Grenzkosten zu steigenden Grenzkosten => $K''(p) = 0$
- Bei p ME liegt der Wendepunkt von K(x) => $K''(p) = 0$
- Die Stückkosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $k(p) = q$
- Die variablen Kosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $K_V(p) = q$
- Die var. Stückkosten bei einer Menge von p ME betragen q GE => $k_V(p) = q$
- Das Betriebsminimum liegt bei p ME => $k_V'(p) = 0$
- Das Betriebsoptimum liegt bei p ME => $k'(p) = 0$
- Die Fixkosten betragen q GE => $K(0) = q$

Vorgehen:

Aufstellen eines linearen Gleichungssystems mit vier Gleichungen (für jede Variable benötigt man eine Gleichung, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Das Gleichungssystem kann dargestellt werden als Gleichung $A \cdot x = b$, wobei A eine 4x4-Matrix ist und b der Lösungsvektor (als 4x1-Spaltenvektor). Der Vektor x ist ebenfalls ein 4x1-Spaltenvektor mit den Einträgen a,b,c und d.

Lösung des LGS mit dem Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix $x = A^{-1} \cdot b$.

CAS-Befehle: solve oder linsolve

Übungsaufgaben (frühere Abituraufgaben)

Aufgabe 1:

Bei der Produktion des LED-Leuchtmittels geht die ISERLED von einer ganzrationalen Kostenfunktion dritten Grades aus. Zur genaueren Bestimmung der Kostenfunktion liegen folgende Informationen vor:

- Bei einer Produktion von 4 ME belaufen sich die Gesamtkosten auf 48 GE.
- Bei einer Produktion von 8 ME ergeben sich variable Stückkosten in Höhe von 13 GE/ME.
- Bei einer Produktion von 6 ME belaufen sich die Grenzkosten auf 15 GE pro ME.
- Bei einer Produktion von 6 ME betragen die Stückkosten 11 GE pro ME.

Leiten Sie die Kostenfunktion her.

Aufgabe 2:

Die Pyrokomet GmbH stellt Feuerwerke aller Art her. Unter anderem werden Feuerwerksraketen, Tischfeuerwerke und Böllersortimente für unterschiedliche Anlässe – z. B. Hochzeiten – produziert. Der Produktentwickler erläutert, dass die Kosten zur Herstellung der Tischfeuerwerke mithilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modelliert werden können. Folgende Eckdaten liegen dazu vor:

- Bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME liegen die Gesamtkosten bei 270 GE.
- Das Betriebsminimum ergibt sich bei 10 ME.
- Die variablen Stückkosten in Höhe von 32 GE / ME werden bei einer Ausbringungsmenge von 20 ME erreicht.
- Die Grenzkosten bei 5 ME betragen 13,25 GE / ME.

Leiten Sie aus den Eckdaten die Gleichung der Kostenfunktion K her.

Aufgabe 3:

Die Rasolux GmbH produziert und vermarktet ein großes Sortiment an Gartengeräten und -maschinen. Darunter ist der Aufsitzmäher Goliath. Da Rasolux viele Mitbewerber hat, muss die GmbH als Polypolist ihre Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation aufmerksam verfolgen.

Die Unternehmensleitung möchte sich einen Überblick über die Kostenentwicklung bei unterschiedlichen Produktionsmengen des Aufsitzmähers Goliath verschaffen und geht von einem ertragsgesetzlichen Kostenverlauf aus.

- Die Fixkosten betragen 7 840 Geldeinheiten (GE).
- Bei einer Produktionsmenge von 2 Mengeneinheiten (ME) betragen die Gesamtkosten 10 800 GE und die Grenzkosten 1 080 GE / ME.
- Die variablen Stückkosten betragen 520 GE / ME, wenn 10 ME produziert werden.

Leiten Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion dritten Grades her.

Lösungen:

Aufgabe 1: $K(x) = 0{,}5\cdot x^3 - 5\cdot x^2 + 21\cdot x + 12$

Aufgabe 2: $K(x) = 0{,}15x^3 - 3x^2 + 32x + 100$

Aufgabe 3: $K(x) = 10x^3 - 240x^2 + 1920x + 7840$

1) $K(x):=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ CAS k(x)

$k_v(x):=\frac{K(x)-d}{x}=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ skv(x):= $\frac{k(x)-d}{x}$

$K'(x):=3\cdot ax^2+2\cdot b\cdot x+c$

↳ k1(x):= $\frac{d}{dx}(k(x))$

$k(x):=\frac{K(x)}{x}=ax^2+b\cdot x+c+\frac{d}{x}$ sk(x):= $\frac{k(x)}{x}$

Math.:

$K(4)=48$

$k_v(8)=13$

$K'(6)=15$

$k(6)=11$

CAS:

k(4) = 48

skv(8) = 13

k1(6) = 15

sk(6) = 11

mit linsolve $a=0{,}5$ $b=-5$ $c=21$ $d=12$

$K(x)=0{,}5x^3-5x^2+21x+12$

Aufgabe 3:

Die Rasolux GmbH produziert und vermarktet ein großes Sortiment an Gartengeräten und -maschinen. Darunter ist der Aufsitzmäher Goliath. Da Rasolux viele Mitbewerber hat, muss die GmbH als Polypolist ihre Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation aufmerksam verfolgen.

Die Unternehmensleitung möchte sich einen Überblick über die Kostenentwicklung bei unterschiedlichen Produktionsmengen des Aufsitzmähers Goliath verschaffen und geht von einem ertragsgesetzlichen Kostenverlauf aus.

- Die Fixkosten betragen 7 840 Geldeinheiten (GE).
- Bei einer Produktionsmenge von 2 Mengeneinheiten (ME) betragen die Gesamtkosten 10 800 GE und die Grenzkosten 1 080 GE / ME.
- Die variablen Stückkosten betragen 520 GE / ME, wenn 10 ME produziert werden.

Leiten Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion dritten Grades her.

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

$$k_v(x) = \frac{K(x) - d}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\left| \begin{array}{l} K(0) = 7840 \\ K(2) = 10800 \\ K'(2) = 1080 \\ k_v(10) = 520 \end{array} \right|$$

mit linsolve oder solve

CAS definieren

$$k(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$k1(x) := 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

oder $\frac{d}{dx}(k(x))$

$$vsk(x) := \frac{k(x) - d}{x}$$

oder $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$a = 10 \quad b = -240 \quad c = 1970 \quad d = 7840$

$$\Rightarrow \underline{K(x) = 10x^3 - 240x^2 + 1970x + 7840}$$

Damit ergeben sich zwangsläufig folgende Eigenschaften für K(x):

-> K(x) ist ökonomisch nur dann sinnvoll, wenn der Graph streng monoton steigend ist, d.h. bei einer Erhöhung der Produktionsmenge steigen die Kosten.
Mathematisch: $K'(x) > 0 \Rightarrow K(x)$ hat keinen Extrempunkt, aber einen Wendepunkt auf $D_{ök}$. Daraus ergibt sich, dass für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dritten Grades $\mathbf{K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$ gilt: $\mathbf{b^2 < 3ac}$. Beweis als Übung.

Warum muss $b < 0$ gelten?

K(x) hat WP, d.h $K''(x) = 6ax + 2b = 0$ hat eine Lösung

$$6ax + 2b = 0 \quad | -2b \iff 6ax = -2b \quad | :6a \iff x = \frac{-2b}{6a}$$

$x > 0$ muss gelten, d.h $\frac{-2b}{\underbrace{6a}_{>0}} > 0 \iff -2b > 0 \iff b < 0$

Warum muss $b^2 < 3ac$ sein?

↳ K(x) hat keinen Extrempunkt, also ist $K'(x) = 0$ nicht lösbar (notw. Bed.)

$$K'(x) = 0 \iff 3ax^2 + 2bx + c > 0 \quad | :3a \iff x^2 + \underbrace{\frac{2b}{3a}}_{p}x + \underbrace{\frac{c}{3a}}_{q} > 0$$

$$p = \frac{2b}{3a} \quad q = \frac{c}{3a}$$

$$x = -\frac{\frac{2b}{3a}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{2b}{3a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{3a}}$$

$$x = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{(3a)^2} - \frac{c}{3a}}$$

$$= -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{(3a)^2} - \frac{c \cdot 3a}{(3a)^2}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{(3a)^2}}$$

Wann ist $b^2 - 3ac < 0 \quad | + 3ac \iff b^2 < 3ac$

Übung: Abi 2021, LK, Teil B 2.2.1

$$G_s(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}45x^2 + 0{,}55x - s, \quad x, s \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ s > 0$$

Fixkosten, wenn $x = 5$ Nullstelle

CAS: $gs(x) :=$ definieren

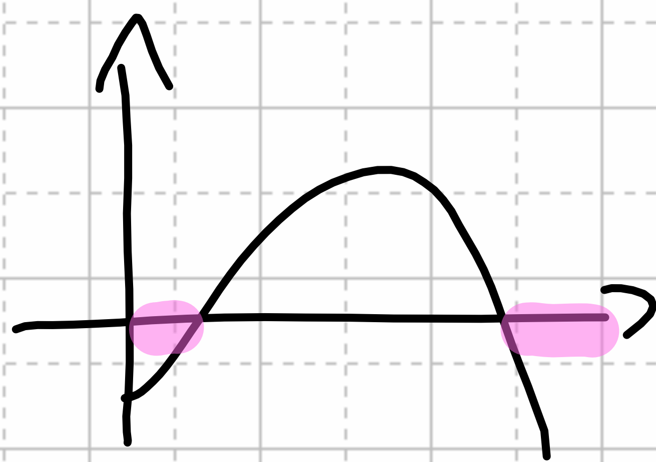
Es gilt: $G_s(5) = 0 \Leftrightarrow s = 1{,}5$ solve(gs(5)=0, s)

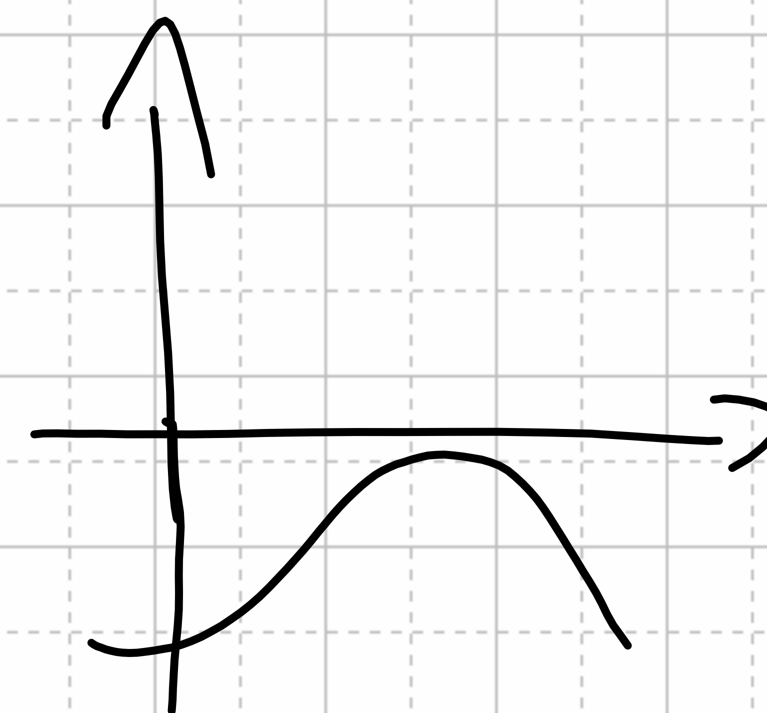
Die Fixkosten betragen 1,5 GE wenn $x = 5$ Nullstelle ist!

Ist $x = 5$ Gewinnschwelle oder Gewinngrenze?

3 Möglichkeiten:
- Graph anzeigen lassen
- Steigung bei $x = 5$ berechnen $G'(5) > 0 \Rightarrow$ Gewinnschwelle $x = 5$
  $G'(5) < 0 \Rightarrow$ Gewinngrenze $x = 5$
- $G_{1,5}(x)$ neu definieren und mit solve oder zeros alle Nullstellen anzeigen lassen.

2.2.2





solve(gs(x)<0,s)

Wo ist die Grenze, ~~d~~ so dass der Hochpunkt noch einen positiven y-Wert hat?

$\Rightarrow$ HP berechnen: Notw. Bed.: $G_s'(x)=0 \Leftrightarrow x=3,52$ solve(gs1(x)=0,x)

$\cancel{x=-0,52}$ ↯

Hinr. Bed. $G_s'(x)=0 \wedge G_s'(x)<0$: $G_s''(3,52)=-1,21<0$ ✓

y-Wert: $G_s(3,52)=3,15-s$ $\Rightarrow$ Die Fixkosten s müssen kleiner als 3,15 GE sein, da sonst kein Gewinn erzielt werden könnte.

$(3,15-s>0 \Leftrightarrow s<3,15)$

HA: Abi 2021, Lk, CAS

2.4

Abi 2020, Lk, GTR

2.1, 2.2