Analysis

1) Ganzrationale Funktionen
    a. Aufstellung von Funktionsgleichungen aus vorgegebenen Bedingungen, auch durch Regression mithilfe des GTR/CAS
    b. Extrem- und Wendepunkte (auch OHIMI)

2) Exponentialfunktionen
    a. Aufstellung von Funktionsgleichungen vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ aus vorgegebenen Bedingungen, auch durch Regression mithilfe des GTR/CAS
    b. Funktionen vom Typ $f(x) = p(x) \cdot e^{q(x)}$ mit p, q ganzrationale Funktionen (auch OHIMI)
    c. Extrem- und Wendepunkte

3) Ökonomische Anwendungen
    a. Modell der vollständigen Konkurrenz insbesondere ertragsgesetzliche Kostenfunktion
    b. ~~Modell Angebotsmonopol~~
    c. Absatzentwicklung/Umsatzentwicklung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

1) **Matrizen** / Lineare Gleichungssysteme ← fett
    a. stochastische Matrizen
    b. Matrizenverknüpfungen und Matrizengleichungen
    c. Inverse Matrizen
    d. LGS und Kriterien für deren Lösbarkeit / Rang einer Matrix

2) Weitere ökonomische Anwendungen
    a. Logistische Zusammenhänge, Kundenwanderung, Mobilität, etc.
    b. ~~innerbetriebliche Verflechtungen~~, mehrstufige Produktionsprozesse

Stochastik

1) Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

2) Binomialverteilung
    a. Bernoulli-Versuch
    b. Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung
    c. Summenfunktion der Binomialverteilung

3) Ökonomische Anwendungen
    a. Kostenabwägungen, Qualitätsprüfungen. Prüfen von Produktionsprozessen

Binomialverteilung

Eine Zufallsvariable X (ZV X) ist binomialverteilt, wenn

- ein Bernoulli-Versuch (genau zwei Ausgänge) wiederholt durchgeführt wird (n-mal)
- die Trefferwahrscheinlichkeit p bei jedem Versuch gleich ist
- die einzelnen Versuche unabhängig voneinander sind

<u>Schreibweise</u>: ZV X , $X \sim B(n;p)$

X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p

Formel von Bernoulli $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Binomialkoeffizient

CAS-Befehle:

$\binom{n}{k}$ $nCr(n,k)$ menu → 5 → 3 (komb.)

$P(X=k)$ $\text{binomPdf}(n,p,k)$ menu → 5 → 5 → A

$P(a \leq X \leq b)$ $\text{binomCdf}(n,p,a,b)$ menu → 5 → 5 – B

$X \sim B(n;p)$

Erwartungswert: $n \cdot p = \mu$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Varianz: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Abi 2021, LK, CAS

4.1.2 $n=160$ $p=0.04$ ZV X: Anzahl Anlagen mit fehlerhafter Halterung

Verteilung $X \sim B(160; 0{,}04)$

$P(A) = P(X=4) = 0{,}1155$ CAS: binomPdf(160, 0.04, 4)
binomCdf(160, 0.04, 4, 4)

$P(B) = P(5 \leq X \leq 7) = 0{,}4597$ binomCdf(160, 0.04, 5, 7)

$P(C) = P(0 \leq X \leq 8) = 0{,}8071$

↳ mind. 95 % fehlerfrei ≙ höchstens 5 % fehlerhaft → X zählt Fehlerhafte

↳ 5 % von 160 ≙ 8 → höchstens 8

Alternativ: ZV Y: fehlerfreie $Y \sim B(160; 0{,}96)$

$P(152 \leq Y \leq 160) = 0{,}8071$ binomCdf(160, 0.96, 152, 160)

$P(D) = P(0 \le x < 3) + P(X > 10)$ binomCdf(160, 0,04, 0, 2)

$= 0,0433 + 0,0576 = 0,1009$ " (" " , 11, 160)

4.2 $X \sim B(50; 0,04)$ neues Stichprobenumfang in 4.2

$P(1 \le X \le 3) = 0,7310$

Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,04 = 2$

Standardabw. $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,04 \cdot 0,96} = 1,38$

Abweichung nach oben: $\mu + \sigma = 2 + 1,38 = 3,38 \to 3$ zu μ hin runden

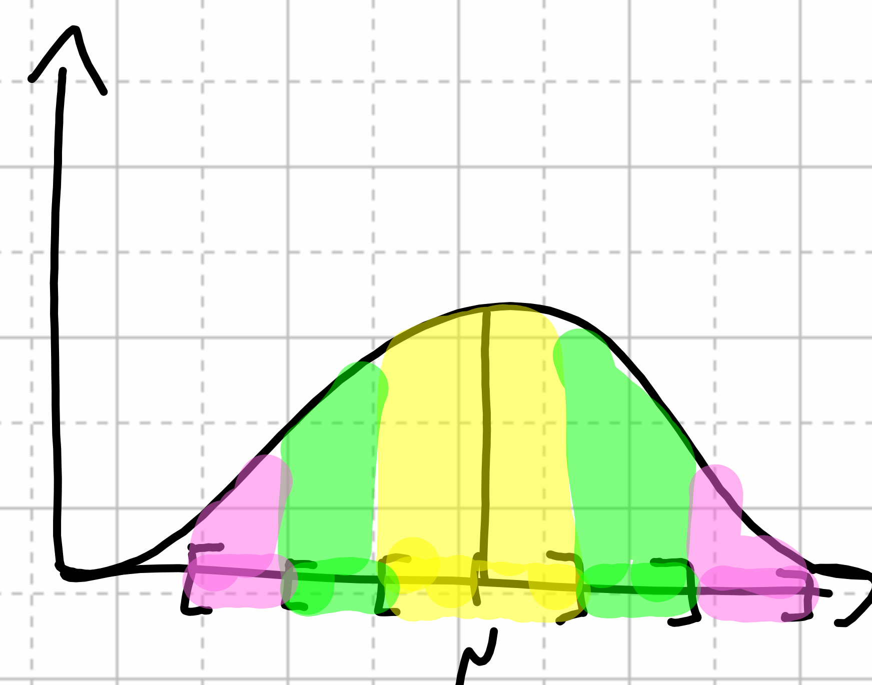
Abweichung nach unten: $\mu - \sigma = 2 - 1,38 = 0,62 \to 1$ zu μ hin runden

σ – Regeln für Zufallsvariable $X \sim B(n;p)$

Es gilt: $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 0{,}68$

$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$

$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$



4.2.2

$$P(E) = 1 - \underbrace{\binom{10}{0} \cdot 0{,}04^{0} \cdot 0{,}96^{10}}_{= P(X=0)}$$

$n=10$ Stichprobe

$k=0$ „Treffer"

↳ fehlerhafte

$p=0{,}04$

↳ Die W., dass bei 10 Anlagen genau 0 eine fehlerhafte Halterung haben.

P(E) ist die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis von „Es sind 0 fehlerhafte Anlagen" also die W. für das Ereignis „mindestens eine Anlage ist fehlerhaft".

4.2.3 Gesucht: Stichprobenumfang n (maximal)

gegeben: $p = 0{,}04$ $\quad X \sim B(n; 0{,}04)$

gesucht: n für $P(X \leq 1) \geq 0{,}95$

$n = 5: P(X \leq 1) = 0{,}9852 > 0{,}95$ binomCdf(n, 0.04, 0, 1)

$n = 10: P(X \leq 1) = 0{,}9418 < 0{,}95$

$n = 9: P(X \leq 1) = 0{,}9522 > 0{,}95$ ✓

Es sollten maximal 9 Anlagen ausgewählt werden!

Teil A (ohne Hilfsmittel) - Analysis

Aufgabe 1:

In der Controlling-Abteilung der JoRo GmbH für das Fahrrad-Modell "City-Bike" wird für die Produktion von folgender Kostenfunktion ausgegangen: $K(x) = 0{,}02 \cdot x^3 - 0{,}6 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 200$ für $x \in [0;50]$. Ein Fahrrad wird für 29 GE/ME verkauft.

a) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Kostenfunktion und erläutern Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang.

b) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion. $E(x) = 29 \cdot x$ $\quad G(x) = E(x) - (K(x))$

c) Bestimmen Sie die kurzfristige Preisuntergrenze.

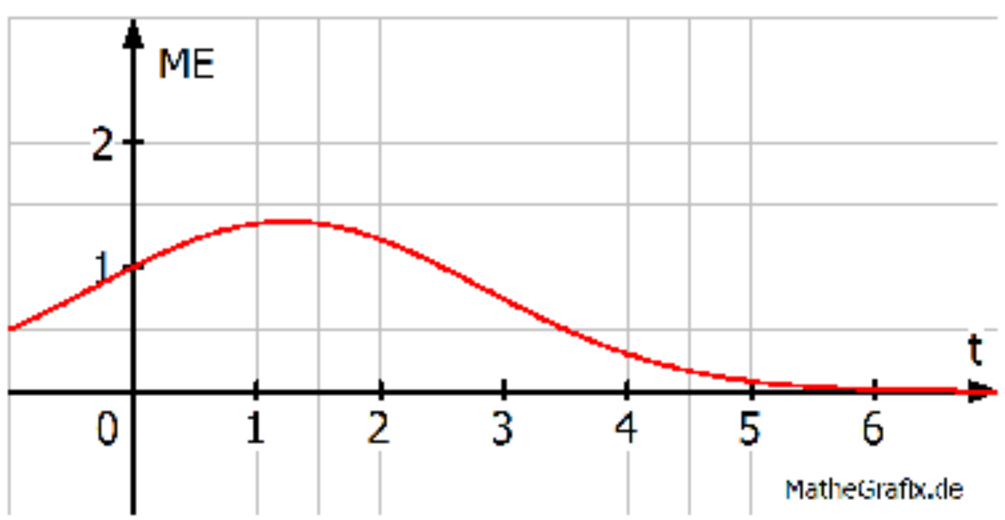
↳ y-Wert vom TP von $k_v(x)$

Aufgabe 2:

Die Absatzzahlen des Modells „City-Bike“ sollen anhand der Funktion $A_b(t) = e^{-0{,}2 \cdot t^2 + b \cdot t}$ beschrieben werden. (Die Variable t gibt die Zeit in Monaten an und $A_b(t)$ den Absatz im Monat t in ME.) Der Parameter b hängt von der Höhe des Werbebudgets ab und ist positiv. Der Beginn des Absatzes wird mit t=0 bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Monate in Abhängigkeit von b, in denen der Absatz genau 1 ME beträgt.

b) Sie sehen den Graphen für b = 0,5. Entscheiden Sie für folgende Aussagen, ob Sie zutreffen oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.



A: Zu Beginn des Absatzes wird 1 ME abgesetzt.

B: Der maximale Absatz beträgt weniger als 1,5 ME.

C: Der stärkste Absatzrückgang ist nach 1,5 Monaten zu erwarten.

D: Langfristig geht der Absatz pro Monat auf 0 ME zurück.

E: Im 1. Monat steigen die Absatzzahlen.

a) $K'(x) = 0{,}06x^2 - 1{,}2x + 16$

$K''(x) = 0{,}12x - 1{,}2$

$K'''(x) = 0{,}12 \neq 0$ ✓

N.B. $K''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}12x - 1{,}2 = 0 \quad | +1{,}2$

$\Leftrightarrow 0{,}12x = 1{,}2 \quad | :0{,}12$

$\Leftrightarrow x = 10$

H.B. $K'''(10) = 0{,}12 \wedge K''(10) = 0$ ✓

y-Wert: $K(10) = 0{,}02 \cdot 10^3 - 0{,}6 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10 + 200$

$= 0{,}02 \cdot 1000 - 0{,}6 \cdot 100 + 160 + 200$

$= 20 - 60 + 160 + 200 = 320$

WP(10|320)

Im WP wechselt die Kostensteigung von degressiv zu progressiv.

b) $G(x) = -0{,}02x^3 + 0{,}6x^2 + 13x - 200$

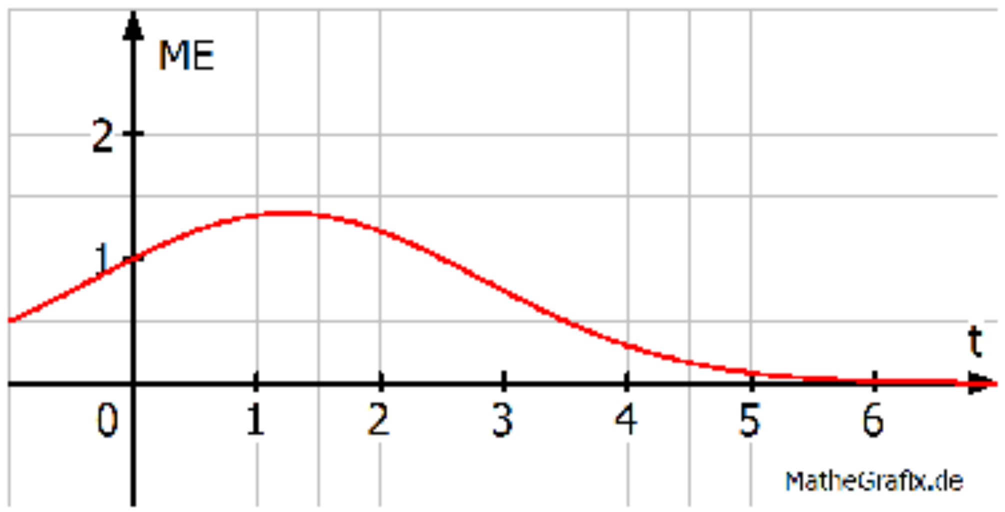
c) KPU = 11,50

Aufgabe 2:

Die Absatzzahlen des Modells „City-Bike“ sollen anhand der Funktion $A_b(t) = e^{-0,2 \cdot t^2 + b \cdot t}$ beschrieben werden. (Die Variable t gibt die Zeit in Monaten an und $A_b(t)$ den Absatz im Monat t in ME.) Der Parameter b hängt von der Höhe des Werbebudgets ab und ist positiv. Der Beginn des Absatzes wird mit t=0 bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Monate in Abhängigkeit von b, in denen der Absatz genau 1 ME beträgt.

b) Sie sehen den Graphen für b = 0,5. Entscheiden Sie für folgende Aussagen, ob Sie zutreffen oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.



A: Zu Beginn des Absatzes wird 1 ME abgesetzt.

B: Der maximale Absatz beträgt weniger als 1,5 ME.

C: Der stärkste Absatzrückgang ist nach 1,5 Monaten zu erwarten.

D: Langfristig geht der Absatz pro Monat auf 0 ME zurück.

E: Im 1. Monat steigen die Absatzzahlen.

$$A_b(t) = e^{-0,2 \cdot t^2 + b \cdot t}$$

a) $A_b(t) = 1$

$\Leftrightarrow e^{-0,2 \cdot t^2 + b \cdot t} = 1$

$\Leftrightarrow -0,2t^2 + b \cdot t = 0$, da $e^0 = 1$

$\Leftrightarrow t \cdot (-0,2t + b) = 0$

$\underline{t = 0}$

$-0,2t + b = 0 \quad | -b$

$\Leftrightarrow -0,2t = -b \quad | :(-0,2) \hat{=} \cdot (-5)$

$\Leftrightarrow \underline{t = 5b}$

www.mathekannjeder.de carsten.vooren@bkcr.info