Teil A (ohne Hilfsmittel) - Analysis

Aufgabe 1:

In der Controlling-Abteilung der JoRo GmbH für das Fahrrad-Modell "City-Bike" wird für die Produktion von folgender Kostenfunktion ausgegangen: $K(x) = 0{,}02 \cdot x^3 - 0{,}6 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 200$ für $x \in [0;50]$. Ein Fahrrad wird für 29 GE/ME verkauft.

a) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Kostenfunktion und erläutern Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang.

b) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion. $E(x) = 29 \cdot x \qquad G(x) = E(x) - (K(x))$

c) Bestimmen Sie die kurzfristige Preisuntergrenze.

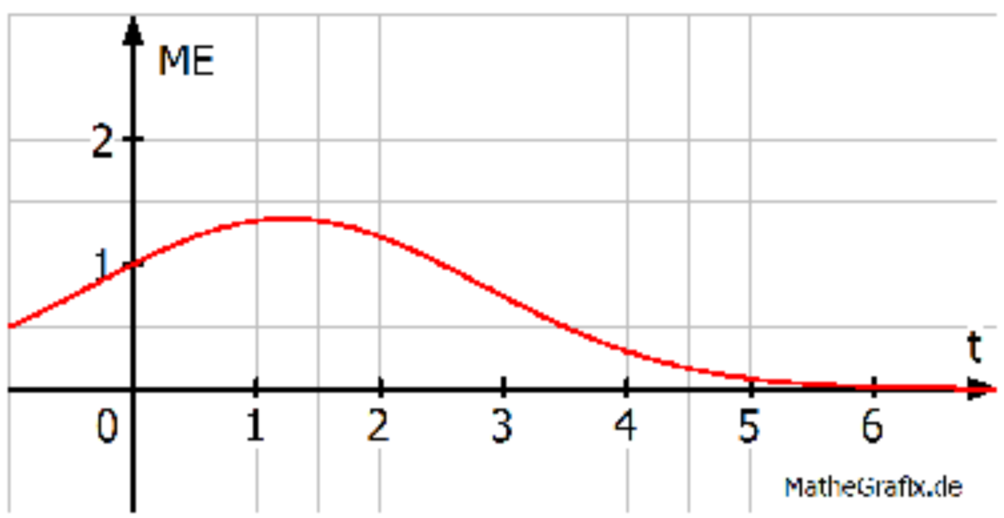
↳ y-Wert vom TP von $k_v(x)$

Aufgabe 2:

Die Absatzzahlen des Modells „City-Bike" sollen anhand der Funktion $A_b(t) = e^{-0{,}2 \cdot t^2 + b \cdot t}$ beschrieben werden. (Die Variable t gibt die Zeit in Monaten an und $A_b(t)$ den Absatz im Monat t in ME.) Der Parameter b hängt von der Höhe des Werbebudgets ab und ist positiv. Der Beginn des Absatzes wird mit t=0 bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Monate in Abhängigkeit von b, in denen der Absatz genau 1 ME beträgt.

b) Sie sehen den Graphen für b = 0,5. Entscheiden Sie für folgende Aussagen, ob Sie zutreffen oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.



A: Zu Beginn des Absatzes wird 1 ME abgesetzt.
B: Der maximale Absatz beträgt weniger als 1,5 ME.
C: Der stärkste Absatzrückgang ist nach 1,5 Monaten zu erwarten.
D: Langfristig geht der Absatz pro Monat auf 0 ME zurück.
E: Im 1. Monat steigen die Absatzzahlen.

a) $K'(x) = 0{,}06x^2 - 1{,}2x + 16$

$K''(x) = 0{,}12x - 1{,}2$

$K'''(x) = 0{,}12 \neq 0$ ✓

N.B $K''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}12x - 1{,}2 = 0 \quad | +1{,}2$

$\Leftrightarrow 0{,}12x = 1{,}2 \quad | :0{,}12$

$\Leftrightarrow x = 10$

H.B. $K'''(10) = 0{,}12 \wedge K''(10) = 0$ ✓

y-Wert: $K(10) = 0{,}02 \cdot 10^3 - 0{,}6 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10 + 200$

$= 0{,}02 \cdot 1000 - 0{,}6 \cdot 100 + 160 + 200$

$= 20 - 60 + 160 + 200 = 320$

WP(10 | 320)

Im WP wechselt die Kostensteigung von depessiv zu progessiv.

b) $G(x) = -0{,}02x^3 + 0{,}6x^2 + 13x - 200$

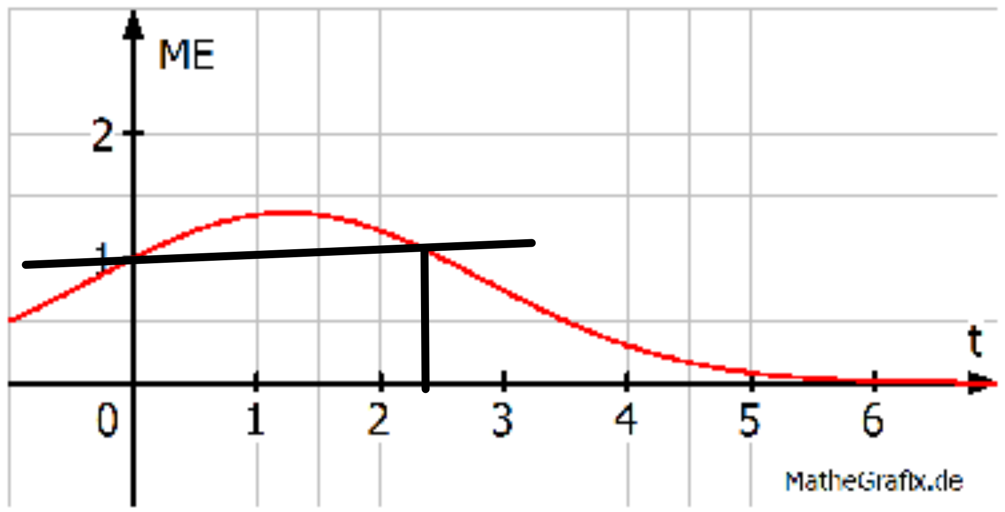
c) KPU = 11,50

Aufgabe 2:

Die Absatzzahlen des Modells „City-Bike" sollen anhand der Funktion $A_b(t) = e^{-0,2 \cdot t^2 + b \cdot t}$ beschrieben werden. (Die Variable t gibt die Zeit in Monaten an und $A_b(t)$ den Absatz im Monat t in ME.) Der Parameter b hängt von der Höhe des Werbebudgets ab und ist positiv. Der Beginn des Absatzes wird mit t=0 bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Monate in Abhängigkeit von b, in denen der Absatz genau 1 ME beträgt.

b) Sie sehen den Graphen für b = 0,5. Entscheiden Sie für folgende Aussagen, ob Sie zutreffen oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.



A: Zu Beginn des Absatzes wird 1 ME abgesetzt.

B: Der maximale Absatz beträgt weniger als 1,5 ME.

C: Der stärkste Absatzrückgang ist nach 1,5 Monaten zu erwarten.

D: Langfristig geht der Absatz pro Monat auf 0 ME zurück.

E: Im 1. Monat steigen die Absatzzahlen.

$$A_b(t) = e^{-0,2 \cdot t^2 + b \cdot t}$$

a) $A_b(t) = 1$

$\Leftrightarrow e^{-0,2 \cdot t^2 + b \cdot t} = 1$

$\Leftrightarrow -0,2t^2 + b \cdot t = 0$, da $e^0 = 1$

$\Leftrightarrow t \cdot (-0,2t + b) = 0$

$\underline{t = 0}$

$-0,2t + b = 0 \quad | - b$

$\Leftrightarrow -0,2t = -b \quad | : (-0,2) \hat{=} \cdot (-5)$

$\Leftrightarrow \underline{t = 5b}$

WG¥13, MLK, 24.02.21

Teil A (ohne Hilfsmittel)

Analysis 1c) $K(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}6x^2 + 16x + 200$

KPU: TP (y-Wert) von $k_v(x)$

$k_v(x) = 0{,}02x^2 - 0{,}6x + 16$

Ableitungen: $k_v'(x) = 0{,}04x - 0{,}6$ $\quad k_v''(x) = 0{,}04$

N.B. für TP: $k_v'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}04x - 0{,}6 = 0 \Leftrightarrow x = 15$

H.B. für TP: $k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) > 0$: $k_v''(15) = 0{,}04 > 0$ ✓

y-Wert: $k_v(15) = 0{,}02 \cdot 15^2 - 0{,}6 \cdot 15 + 16 = 0{,}02 \cdot 225 - 9 + 16$

$= 4{,}5 - 9 + 16 = 11{,}5$

TP(15 | 11.5)

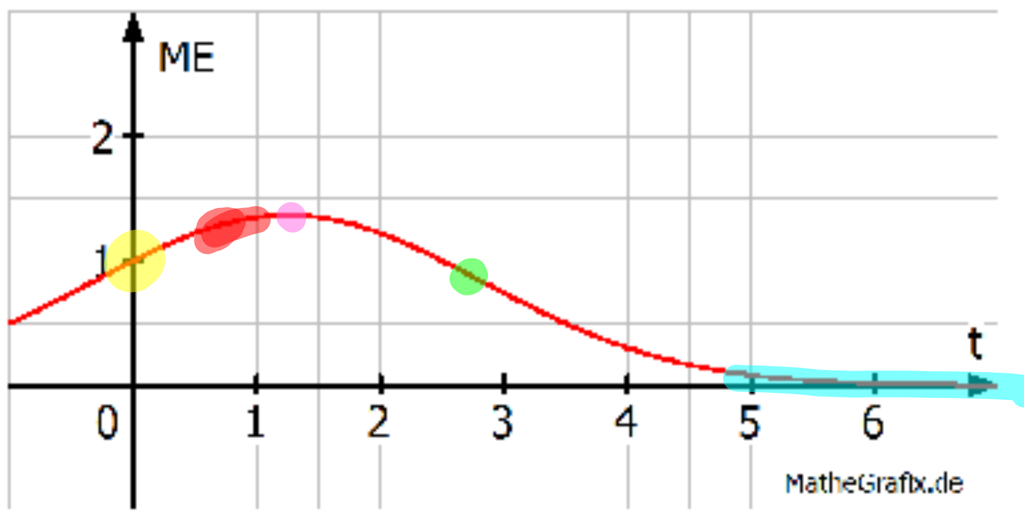
Betriebsminimum ↵ ↳ KPU

Aufgabe 2:

Die Absatzzahlen des Modells „City-Bike“ sollen anhand der Funktion $A_b(t) = e^{-0{,}2 \cdot t^2 + b \cdot t}$ beschrieben werden. (Die Variable t gibt die Zeit in Monaten an und $A_b(t)$ den Absatz im Monat t in ME.) Der Parameter b hängt von der Höhe des Werbebudgets ab und ist positiv. Der Beginn des Absatzes wird mit t=0 bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Monate in Abhängigkeit von b, in denen der Absatz genau 1 ME beträgt.

b) Sie sehen den Graphen für b = 0,5. Entscheiden Sie für folgende Aussagen, ob Sie zutreffen oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.



A: Zu Beginn des Absatzes wird 1 ME abgesetzt. y-Abschnitt

B: Der maximale Absatz beträgt weniger als 1,5 ME. HP

C: Der stärkste Absatzrückgang ist nach 1,5 Monaten zu erwarten. WP

D: Langfristig geht der Absatz pro Monat auf 0 ME zurück. lim

E: Im 1. Monat steigen die Absatzzahlen.

A : trifft zu

↳ y-Abschnitt bei 1

B : trifft zu

↳ y-Wert HP deutlich unter 1,5

C : trifft nicht zu

↳ x-Wert WP bei $x \approx 2{,}8$

D : trifft zu

↳ $\lim_{t \to \infty} A_{0{,}5}(t) = 0$

E : trifft zu

↳ Graph steigt bei $t = 1$ und für $0 < t < 1$

Teil A (ohne Hilfsmittel) - Stochastik

Aufgabe 3:

Bei der Produktion von Powerbanks treten zwei Fehler unabhängig voneinander auf. Zum einen kann der Akku defekt sein (Fehler A) und zum anderen die Schnittstelle zum Kabel (Fehler K). Fehler A tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% auf und Fehler K mit einer Wahrscheinlichkeit von 5%.

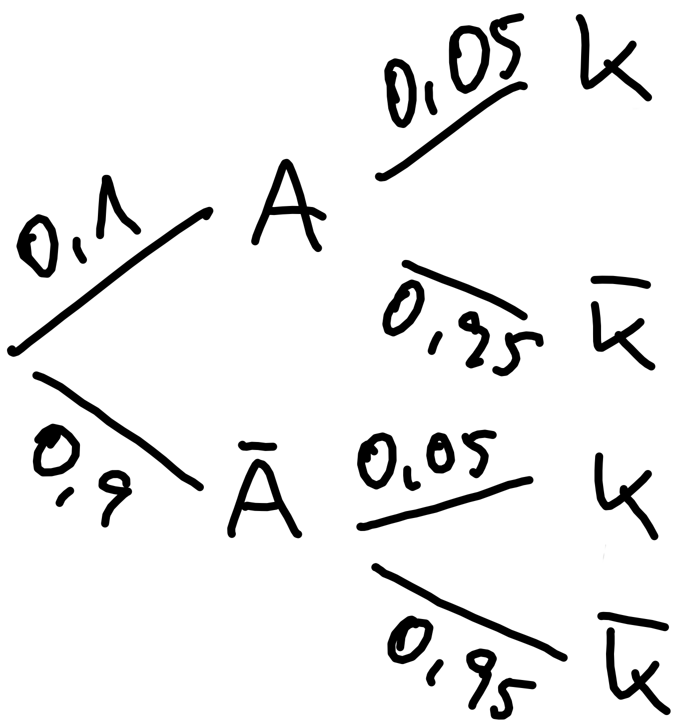
a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm dar.
b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Powerbank nicht fehlerfrei ist.
c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Powerbank genau einen Fehler hat.
d) Berechnen Sie auf welchen Wert die Wahrscheinlichkeit für Fehler A sinken müsste, damit eine Powerbank mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% fehlerfrei ist.

b) $P(\text{nicht fehlerfrei})$
$= P(A \cap K) + P(A \cap \bar{K}) + P(\bar{A} \cap K)$
$= 0{,}005 + 0{,}095 + 0{,}045 = \underline{\underline{0{,}145}}$

oder

$P(\text{nicht fehlerfrei}) = 1 - P(\text{fehlerfrei})$
$= 1 - P(\bar{A} \cap \bar{K}) = 1 - 0{,}855 = \underline{\underline{0{,}145}}$

a)



$P(A \cap K) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{100} = \frac{5}{1000} = 0{,}005$

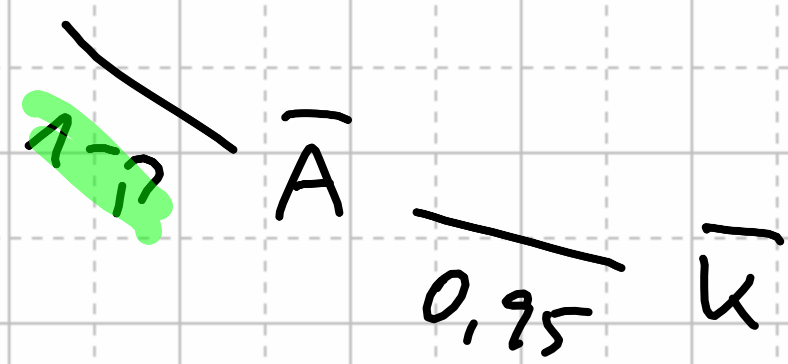
$P(A \cap \bar{K}) = 0{,}095$

$P(\bar{A} \cap K) = \frac{45}{1000} = 0{,}045$

$P(\bar{A} \cap \bar{K}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{95}{100} = \frac{855}{1000} = 0{,}855$

c) $P(\text{genau ein Fehler}) = P(A \cap \bar{K}) + P(\bar{A} \cap K) = 0{,}095 + 0{,}045 = \underline{\underline{0{,}14}}$

3d) neu: $P(A) = p \Rightarrow P(\bar{A}) = 1-p$



$P(\bar{A} \cap \bar{K}) = (1-p)\cdot 0{,}95 \geq 0{,}9 \quad \vert :0{,}95$

$\Leftrightarrow 1-p \geq \frac{0{,}9}{0{,}95}$

$\Leftrightarrow 1-p \geq \frac{18}{19} \quad \vert +p \quad \vert -\frac{18}{19}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{18}{19} \geq p \Leftrightarrow \frac{1}{19} \geq p$

$$\frac{0{,}9}{0{,}95} = \frac{\frac{90}{100}}{\frac{95}{100}} = \frac{\overset{18}{\cancel{90}}}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{\underset{19}{\cancel{95}}}$$

Kürzen durch 5

Die Fehlerwahrscheinlichkeit für A muss auf $\frac{1}{19}$ oder weniger sinken.

Aufgabe 4:

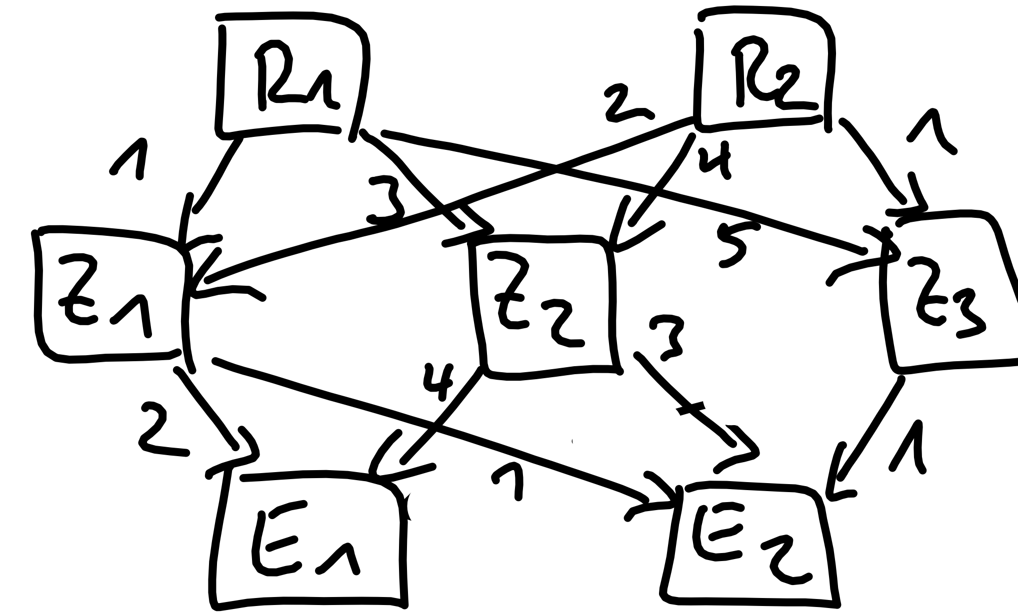
In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 drei Zwischenprodukte Z_1 bis Z_3 hergestellt. Diese wiederum werden zu zwei Endprodukten E_1 und E_2 zusammengebaut. Die Matrizen A_{RZ}, B_{ZE} und C_{RE} geben den Materialfluss an.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ b & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_{RE} = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 20 & c \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die fehlenden Werte in den Matrizen.

b) Stellen Sie den Materialfluss in einem Verflechtungsdiagramm dar.

b)



a)

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 2 & 1 \\ & & & b & 3 \\ & & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & a & 14 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 20 & c \end{array}$$

2. Zeile × 2. Spalte $\quad 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = c = 15$

1. Zeile × 2. Spalte $\quad 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + a \cdot 1 = 15$

$\Leftrightarrow 10 + a = 15 \Leftrightarrow \underline{a = 5}$

1. Zeile × 1. Spalte $\quad 1 \cdot 2 + 3 \cdot b + 5 \cdot 0 = 14$

$\Leftrightarrow 2 + 3b = 14 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = 4}}$

Teil B (mit CAS) – Lineare Algebra

Aufgabe 5:
Ermitteln Sie, für welche Parameter a die Matrix A nicht invertierbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

CAS: $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{a-14} & \frac{-3a}{a-14} & \frac{a}{a-14}+1 \\ \frac{-4}{a-14} & \frac{-4a}{a-14} & \frac{-12}{a-14}-1 \\ \frac{1}{a-14} & \frac{-14}{a-14} & \frac{3}{a-14} \end{pmatrix}$$

Im Nenner eines Bruches darf keine 0 stehen, also ist A für alle $a \neq 14$ invertierbar.

Aufgabe 6:

Die Firma Lago stellt Bausteine aus Kunststoff als Spielzeug her. Sie produziert aus den Rohstoffen R1 bis R3 kleine Bausteine (K), große Bausteine (G) und Platten (P). Die Bausteine und Platten werden in den verschiedenen Sortierungen B1 bis B3 auf den Markt gebracht. Den Materialfluss geben die folgenden Tabellen wieder.

	K	G	B		B1	B2	B3
R1	1	3	5	K	5	10	y
R2	x	1	3	G	5	15	0
R3	2	z	6	B	1	u	2

a) Die Matrix C_{RB}, die den Verbrauch der Rohstoffe je Endprodukt (Sortierung) angibt, hat folgende Gestalt.

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 25 & 70 & 18 \\ 18 & 44 & 22 \\ 31 & 83 & 28 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Unbekannten x, y, z und u. [Zur Kontrolle: u=3; x=2; y=8 und z=3]

b) In einem Produktionszeitraum beträgt der Lagerbestand an Rohstoffen von R1 3.400 ME, von R2 2.230 ME und von R3 3.800 ME. Von B1 sollen 20 Stück, von B2 35 Stück und von B3 15 Stück hergestellt werden. Ermitteln Sie den Bedarf an Rohstoffen für diese Produktion und überprüfen Sie, ob noch Restbestände im Lager verbleiben oder zusätzlicher Bedarf eingekauft werden muss.

d) Die Geschäftsleitung hat nach einer Marktanalyse festgelegt, dass für B1 die variablen Kosten 1,71 €, für B2 4,45 € und für B3 1,64 € nicht überschreiten dürfen.

Die Rohstoffkosten betragen 1 Cent pro ME für R1, 2 Cent pro ME für R2 und 2 Cent pro ME für R3. Die Kosten für die Zusammenstellung der Sortierungen belaufen sich auf 5 Cent für B1, 7 Cent für B2 und 6 Cent für B3.
Berechnen Sie, wie hoch die Kosten für die Fertigung der kleinen und großen Steine sowie für die Platten höchstens sein dürfen, um die vorgegebenen Kosten nicht zu überschreiten.

a) y: 1Z × 3S

$1 \cdot y + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 18 \Leftrightarrow y = 8$

u: 1Z × 2S

$1 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 5u = 70 \Leftrightarrow u = 3$

x und z genau so.

b)

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} \cancel{B_1 \quad B_2 \quad B_3} \\ \begin{pmatrix} 25 & 70 & 18 \\ 18 & 44 & 22 \\ 31 & 83 & 28 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} \begin{array}{c} ME \\ \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} ME \\ \begin{pmatrix} 3220 \\ 2230 \\ 3945 \end{pmatrix} \end{array} \text{Bedarf}$$

$3 \times 3 \qquad 3 \times 1 \qquad 3 \times 1$

Vergleich Bedarf mit Lagerbestand

R_1: Restbestand 180 ME

R_2: " 0 ME

R_3: Lagerbestand reicht nicht $\Rightarrow$ 145 ME bestellen.