Aufgabe 6:

Die Firma Lago stellt Bausteine aus Kunststoff als Spielzeug her. Sie produziert aus den Rohstoffen R1 bis R3 kleine Bausteine (K), große Bausteine (G) und Platten (P). Die Bausteine und Platten werden in den verschiedenen Sortierungen B1 bis B3 auf den Markt gebracht. Den Materialfluss geben die folgenden Tabellen wieder.

| | K | G | B | | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R1 | 1 | 3 | 5 | K | 5 | 10 | y |
| R2 | x | 1 | 3 | G | 5 | 15 | 0 |
| R3 | 2 | z | 6 | B | 1 | u | 2 |

a) Die Matrix $C_{RB}$, die den Verbrauch der Rohstoffe je Endprodukt (Sortierung) angibt, hat folgende Gestalt.

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 25 & 70 & 18 \\ 18 & 44 & 22 \\ 31 & 83 & 28 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Unbekannten x, y, z und u. [Zur Kontrolle: u=3; x=2; y=8 und z=3]

b) In einem Produktionszeitraum beträgt der Lagerbestand an Rohstoffen von R1 3.400 ME, von R2 2.230 ME und von R3 3.800 ME. Von B1 sollen 20 Stück, von B2 35 Stück und von B3 15 Stück hergestellt werden. Ermitteln Sie den Bedarf an Rohstoffen für diese Produktion und überprüfen Sie, ob noch Restbestände im Lager verbleiben oder zusätzlicher Bedarf eingekauft werden muss.

d) Die Geschäftsleitung hat nach einer Marktanalyse festgelegt, dass für B1 die variablen Kosten 1,71 €, für B2 4,45 € und für B3 1,64 € nicht überschreiten dürfen.

Die Rohstoffkosten betragen 1 Cent pro ME für R1, 2 Cent pro ME für R2 und 2 Cent pro ME für R3. Die Kosten für die Zusammenstellung der Sortierungen belaufen sich auf 5 Cent für B1, 7 Cent für B2 und 6 Cent für B3.
Berechnen Sie, wie hoch die Kosten für die Fertigung der kleinen und großen Steine sowie für die Platten höchstens sein dürfen, um die vorgegebenen Kosten nicht zu überschreiten.

a) y: 1Z × 3S

$1 \cdot y + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 18 \Leftrightarrow y = 8$

u: 1Z × 2S

$1 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 5u = 70 \Leftrightarrow u = 3$

x und z genau so.

b)

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} \cancel{B_1 \; B_2 \; B_3} \\ \begin{pmatrix} 25 & 70 & 18 \\ 18 & 44 & 22 \\ 31 & 83 & 28 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} \begin{array}{c} ME \\ \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} ME \\ \begin{pmatrix} 3220 \\ 2230 \\ 3945 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bedarf

$3 \times 3$ $\qquad$ $3 \times 1$ $\qquad$ $3 \times 1$

Vergleich Bedarf mit Lagerbestand

$R_1$: Restbestand 180 ME

$R_2$: " 0 ME

$R_3$: Lagerbestand reicht nicht ⇒ 145 ME bestellen.

d) Die Geschäftsleitung hat nach einer Marktanalyse festgelegt, dass für B1 die variablen Kosten 1,71 €, für B2 4,45 € und für B3 1,64 € nicht überschreiten dürfen.

Die Rohstoffkosten betragen 1 Cent pro ME für R1, 2 Cent pro ME für R2 und 2 Cent pro ME für R3. Die Kosten für die Zusammenstellung der Sortierungen belaufen sich auf 5 Cent für B1, 7 Cent für B2 und 6 Cent für B3.

Berechnen Sie, wie hoch die Kosten für die Fertigung der kleinen und großen Steine sowie für die Platten höchstens sein dürfen, um die vorgegebenen Kosten nicht zu überschreiten.

Zwischenproduktkosten gesucht!

$\vec{k}_Z = (x \quad y \quad z)$

WG Y13, MLK
25.02.22

Variable Kosten der Sortierungen (Endprodukte)

= Rohstoffkosten + Zwischenproduktkosten + Endproduktkosten

$$= \underset{1\times 3}{\vec{k}_R} \cdot \underset{3\times 3}{C_{RE}} + \underset{1\times 3}{\vec{k}_Z} \cdot \underset{3\times 3}{B_{ZE}} + \underset{1\times 3}{\vec{k}_E}$$

$$= (0{,}01 \quad 0{,}02 \quad 0{,}02) \cdot \begin{pmatrix} 25 & 70 & 18 \\ 18 & 44 & 22 \\ 31 & 83 & 28 \end{pmatrix} + (x \quad y \quad z) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 5 & 15 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + (0{,}05 \quad 0{,}07 \quad 0{,}06)$$

$$\leq (1{,}71 \quad 4{,}45 \quad 1{,}64)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1{,}23 & 3{,}24 & 1{,}18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5x+5y+z & 10x+15y+3z & 8x+2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}06 \end{pmatrix}$$

$$\leq \begin{pmatrix} 1{,}71 & 4{,}45 & 1{,}64 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 1{,}23 & 3{,}24 & 1.18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}06 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x+5y+z & 10x+15y+3z & 8x+2z \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0{,}43 & 1{,}14 & 0{,}40 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{LGS} \left| \begin{array}{l} 5x+5y+z \leq 0{,}43 \\ 10x+15y+3z \leq 1{,}14 \\ 8x \qquad +2z \leq 0{,}40 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \leq 0{,}03 \\ y \leq 0{,}04 \\ z \leq 0{,}08 \end{array}$$

Die Zwischenproduktkosten dürfen 3 cent (kleine Steine), 4 Cent (große Steine) und 8 cent (Platten) nicht überschreiten.

Aufgabe 7

In der Zoom-Erlebniswelt gibt es drei große Welten, Asien (AS), Alaska (AL) und Afrika (AF). Um die Attraktivität der Welten zu analysieren wurden Dauerkartenbesitzer befragt, die pro Besuch nur eine Welt erkunden. Die Antworten finden sich in folgender Tabelle. Das bedeutet beispielsweise, dass 40% der Befragten nach einem „Asien-Besuch" beim nächsten Mal wieder nach „Asien" gehen und dass 60% der „Afrika-Besucher" beim nächsten Mal nach „Alaska" gehen.

| | Dauerkartenbesitzer wechselt von | | |
|---|---|---|---|
| | AS | AL | AF |
| zu AS | 40% | 15% | 10% |
| zu AL | 30% | 50% | 60% |
| zu AF | 30% | 35% | 30% |

a) Beim ersten Besuch gehen 25% nach Asien, 30% nach Alaska und 45% nach Afrika. Berechnen Sie die prozentuale Aufteilung dieser Besucher für den 2., 3. und 4. Besuch und untersuchen Sie die weitere Entwicklung der Verteilung. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis in Bezug auf die Attraktivität der drei Welten.

b) Untersuchen Sie, wie die prozentuale Anfangsverteilung aussähe, falls die Anzahlen der Dauerkartenbesitzer sich anfänglich im Verhältnis 2 : 2 : 5 verhalten würden.

Anfangverteilung: $V_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}$ 1. Besuch

$$S = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,15 & 0,10 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 \\ 0,3 & 0,35 & 0,3 \end{pmatrix}$$

2. Besuch $V_1 = S^1 \cdot V_0 = \begin{pmatrix} 19 \\ 49,5 \\ 31,5 \end{pmatrix}$

3. Besuch $V_2 = S^2 \cdot V_0 = S \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 18,2 \\ 49,4 \\ 32,5 \end{pmatrix}$

4. Besuch $V_3 = S^3 \cdot V_0 = \begin{pmatrix} 17,9 \\ 49,6 \\ 32,5 \end{pmatrix}$

Langfristig $V_n = S^n \cdot V_0$ verschiedene hohe Zahlen für n ausprobieren

$$V^* = \begin{pmatrix} 17,8 \\ 49,7 \\ 32,5 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 2/9 \\ 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,2\,\% \\ 22,2\,\% \\ 55,5\,\% \end{pmatrix}$$

c) Durch den Bau eines neuen Geheges soll die Asien-Welt aufgewertet werden. Die Auswertung ergibt die stationäre (stabile) Verteilung (der Fixvektor)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,1936 \\ 0,3548 \\ 0,4516 \end{pmatrix}$$

ein. Die neue Übergangsmatrix hat jetzt die Form: $S^* = \begin{pmatrix} 0,4 & a & b \\ c & d & e \\ f & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie Werte der Koeffizienten a bis f unter der zusätzlichen Annahme, dass der Anteil der Alaska-Besucher, die beim nächsten Mal wieder nach Alaska gehen bei 20% liegt.

d) Durch die Matrix $S^*$ aus c kennen Sie die Verteilung der Dauerkartenbesitzer an einem bestimmten Tag t:

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Prozentsätze $v_1'$ und $v_2'$ des folgenden Tages $v_{t+1}$ liegen könnten.

Verwenden Sie $S^* = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ falls Sie in c) die Matrix S* nicht bestimmt haben.