- Buch Seite 320, Nr. 1

Aufgabe 1

In der Zoom-Erlebniswelt gibt es drei große Welten, Asien (AS), Alaska (AL) und Afrika (AF). Um die Attraktivität der Welten zu analysieren wurden Dauerkartenbesitzer befragt, die pro Besuch nur eine Welt erkunden. Die Antworten finden sich in folgender Tabelle. Das bedeutet beispielsweise, dass 40% der Befragten nach einem „Asien-Besuch“ beim nächsten Mal wieder nach „Asien“ gehen und dass 60% der „Afrika-Besucher“ beim nächsten Mal nach „Alaska“ gehen.

	Dauerkartenbesitzer wechselt von		
	AS	AL	AF
zu AS	40%	15%	10%
zu AL	30%	50%	60%
zu AF	30%	35%	30%

a) Beim ersten Besuch gehen 25% nach Asien, 30% nach Alaska und 45% nach Afrika. Berechnen Sie die prozentuale Aufteilung dieser Besucher für den 2., 3. und 4. Besuch und untersuchen Sie die weitere Entwicklung der Verteilung. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis in Bezug auf die Attraktivität der drei Welten.

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}35 & 0{,}3 \end{pmatrix} \text{ (aus der Tabelle)}$$

Prüfen, ob S eine stochastische Matrix ist:

- Jede Spaltensumme muss 1 ergeben (oder 100%). ✔
- Matrix muss quadratisch sein (Zeilen- und Spaltenzahl ist gleich). ✔
- Alle Einträge müssen mindestens 0, aber höchstens 1 sein: $0 \leq s_{ij} \leq 1$. ✔

Anfangsverteilung $v_0 = \begin{pmatrix} 25\% \\ 30\% \\ 45\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,30 \\ 0,45 \end{pmatrix}$ (beide Schreibweisen sind möglich)

Verteilung beim nächsten Besuch $v_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,15 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 \\ 0,3 & 0,35 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 49,5 \\ 31,5 \end{pmatrix}$

$v_2 = S \cdot v_1 = S \cdot S \cdot v_0 = S^2 \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 18,18 \\ 49,35 \\ 32,48 \end{pmatrix}$ $v_3 = S^3 \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 17,92 \\ 49,61 \\ 32,47 \end{pmatrix}$

Untersuchung der weiteren Entwicklung:

z.B. Berechnen von $v_6 = S^6 \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 17,84 \\ 49,68 \\ 32,48 \end{pmatrix}$ und $v_{10} = S^{10} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 17,83 \\ 49,68 \\ 32,48 \end{pmatrix}$

Offensichtlich verändern sich die Werte nicht mehr oder nur noch minimal, das heißt die Verteilung ist hier fix und man nennt diesen Vektor einen Fixvektor v^*.

Erinnerung: Für einen Fixvektor gilt $S \cdot v^* = v^*$

Die Zahlen deuten darauf hin, dass die Alaska-Welt am attraktivsten ist und die Asien-Welt die am wenigsten attraktive Welt.

b) Untersuchen Sie, wie die prozentuale Anfangsverteilung aussähe, falls die Anzahlen der Dauerkartenbesitzer sich anfänglich im Verhältnis 2 : 2 : 5 verhalten würden.

Es gibt insgesamt 9 Anteile (9 = 2+2+5) und damit sind die Anteile 2/9, 2/9 und 5/9.

$v_0 = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 2/9 \\ 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,22\% \\ 22,22\% \\ 55,55\% \end{pmatrix}$

Extra-Übung: Anfangsverhältnis 1:3:4. Wie sieht die Anfangsverteilung in % aus?

$\begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/8 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,5\% \\ 37,5\% \\ \ldots \end{pmatrix}$

WGY13, MLK
3.3.22

c) Durch den Bau eines neuen Geheges soll die Asien-Welt aufgewertet werden. Die Auswertung ergibt die stationäre (stabile) Verteilung (der Fixvektor)

$$\vec{v}^* = \begin{pmatrix} 0,1936 \\ 0,3548 \\ 0,4516 \end{pmatrix}$$

ein. Die neue Übergangsmatrix hat jetzt die Form: $S^* = \begin{pmatrix} 0,4 & a & b \\ c & d & e \\ f & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie Werte der Koeffizienten a bis f unter der zusätzlichen Annahme, dass der Anteil der Alaska-Besucher, die beim nächsten Mal wieder nach Alaska gehen bei 20% liegt.

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & b \\ c & 0,2 & e \\ f & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

d=0,2 => a = 1 - 0,6 – 0,2 = 0,2, da die Spaltensumme in der 2. Spalte gleich 1 sein muss.

Da v^* ein Fixvektor ist, gilt $\mathbf{S^* \cdot v^* = v^*}$.

$$S^* \cdot v^* = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & b \\ c & 0,2 & e \\ f & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1936 \\ 0,3548 \\ 0,4516 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1936 \\ 0,3548 \\ 0,4516 \end{pmatrix} = v^*$$

Die Multiplikation von Matrix und Vektor erfolgt über „Zeile mal Spalte".

1.Zeile x 1. Spalte: $0,4 \cdot 0,1936 + 0,2 \cdot 0,3548 + b \cdot 0,4516 = 0,1936$ (nur eine Unbekannte, die Gleichung kann also nach b umgestellt werden bzw. mit dem solve-Befehl gelöst werden) => $b = 0,1$ (kann gerundet werden)

Nun kann e über die Spaltensumme berechnet werden $e = 1 - 0,1 - 0,4 = 0,5$

2. Zeile x 1. Spalte: $c \cdot 0,1936 + 0,2 \cdot 0,3548 + 0,5 \cdot 0,4516 = 0,3548 \Leftrightarrow c = 0,3$

Nun kann f über die Spaltensumme berechnet werden $f = 1 - 0,4 - 0,3 = 0,3$

$$S^* = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Kriterien für eine stochastische Matrix sind erfüllt. ✔

d) Durch die Matrix S* aus c kennen Sie die Verteilung der Dauerkartenbesitzer an einem bestimmten Tag t:

2 Unbekannte $\vec{v}_t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $v_1 + v_2 = \underbrace{0,8}_{=1-0,2} \mid -v_2 \Leftrightarrow v_1 = 0.8 - v_2$

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Prozentsätze v_1' und v_2' des folgenden Tages v_{t+1} liegen könnten.

Verwenden Sie $S^* = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ falls Sie in c) die Matrix S* nicht bestimmt haben.

Die Summe der Einträge von v_t ist gleich 1, das heißt $v_1 + v_2 + 0,2 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{v_1 = 0,8 - v_2}$

$$v_{t+1} = S^* \cdot v_t = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 - v_2 \\ v_2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,34 - 0,2 \cdot v_2 \\ 0,34 - 0,1 \cdot v_2 \\ 0,3 \cdot v_2 + 0,32 \end{pmatrix}$$

1 Unbekannte durch Einsetzen von $0.8 - v_2$ für v_1

Der Wert für v_2 liegt im Intervall [0 ; 0,8]. Einsetzen der beiden Grenzen in v_{t+1}

$$v_2 = 0 \Rightarrow v_{t+1} = \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,34 \\ 0,32 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 0,8 \Rightarrow v_{t+1} = \begin{pmatrix} 0,34 - 0,2 \cdot 0,8 \\ 0,34 - 0,1 \cdot 0,8 \\ 0,3 \cdot 0,8 + 0,32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 \\ 0,26 \\ 0,56 \end{pmatrix}$$

Damit liegen die Werte für Asien am Tag t+1 zwischen 18% und 34% und die Werte für Alaska liegen zwischen 26% und 34%.

Der Wert für Afrika liegt zwischen 32% und 56%.

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \qquad v_t = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

gesucht $v_{t+1} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$ Bereiche für v_1', v_2' und v_3'

Es gilt: $v_2 + v_3 = 0{,}5 \quad | -v_2 \iff v_3 = 0{,}5 - v_2$

$$v_{t+1} = S \cdot v_t = S \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ v_2 \\ 0{,}5 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 - 0{,}2\,v_2 \\ 0{,}2 \cdot v_2 + 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Für den Tag v_{t+1} gilt:

$$0{,}15 \leq v_1' \leq 0{,}25$$

$$0{,}25 \leq v_2' \leq 0{,}35$$

$$v_3' = 0{,}5$$

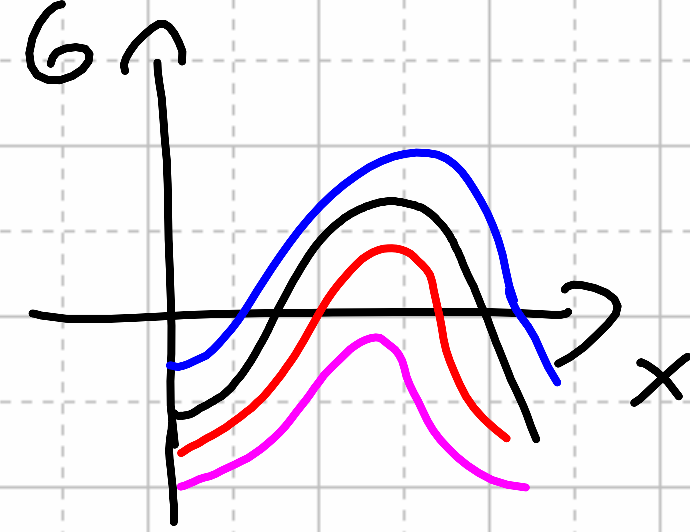
$v_2 = 0{,}5 \Rightarrow v_{t+1} = \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}35 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

$v_2 = 0 \Rightarrow v_{t+1} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

ABI 2021, LK, CAS

2.2.2 Fixkosten so bestimmen, dass noch Gewinn erzielt werden kann

Skizze



y-Wert des HP von $G(x)$ darf nicht negativ sein!

Bsp: (nicht zur Aufgabe) HP wird berechnet: $HP(30 \mid 200 - k_{Fix})$

$\downarrow$

$200 - k_{Fix} \geq 0$

$\Leftrightarrow 200 \geq k_{Fix}$

k_{Fix} muss kleiner als 200 GE sein.

Regression

t	0	10	20	30	40	50
$f(t)$	20	40	55	45	25	10

Funktion mit Regression

Kubisch

$f(t) = 0.008t^3 - 0.127t^2 + 3,72t + 18.61$

$R^2 = 0,966$

4. Ordnung

$f(t) = 0,000073t^4 - 0,0064t^3 + 0,102t^2 + 1.63t + 19,86$

$R^2 = 0,996$

exponentiell

$f(t) = 40,42 \cdot 0,985^x$ $\quad r^2 = 0,18$