Rangkriterien

Lösen von Gleichungen der Form $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\vec{x}} = \underset{m\times 1}{\vec{b}}$

$$A\cdot\vec{x} = \vec{b} \iff \left| \begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array} \right|$$

Umformen des LGS in Diagonalform mit CAS-Befehl ref, rref oder mit Gauß-Alg. (ohne Hilfsmittel)

Kurzschreibweisen: $\quad Rg\ A \;\hat{=}\;$ Rang der Matrix A

$Rg\,(A|b) \;\hat{=}\;$ Rang des erweiterten LGS (mit Vektor $\vec{b}$)

Rangkriterien

$\operatorname{Rg} A < \operatorname{Rg}(A|b)$

unlösbar

es existiert keine Lösung für das LGS

Bsp.: letzte Zeile: $0 \quad 0 \quad 0 \mid 3$

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b)$

lösbar

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b) = m$

eindeutige Lösung

Bsp. letzte Zeile $0 \quad 0 \quad 1 \mid 12$

$\operatorname{Rg} A = m \iff A^{-1}$ existiert

$\iff A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar mit $\vec{x} = A^{-1} \cdot b$

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b) < m$

unendlich viele Lösungen

Bsp letzte Zeile $0 \quad 0 \quad 0 \mid 0$

$\Rightarrow x_n = s$

Inverse mit Gauß

$$A \mid E \rightarrow E \mid A^{-1}$$

Wenn beim Umformen eine Nullzeile entsteht, existiert keine Inverse von A.

Übung: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-a \end{pmatrix}$ Für welche a ist $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1x + 2y = -1 \\ 2x + ay = 2-a \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \leftarrow - \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1x + 2y = -1 \\ (4-a)y = -4+a \end{array} \right|$$

NR
$$\begin{array}{rl} & 2x + 4y = -2 \\ - & 2x + ay = (2-a) \\ \hline & (4-a)y = \end{array}$$

NR
$$-2-(2-a) = -2-2+a = -4+a$$

↳ kritischer Wert: $a = 4$

Für alle a ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \hookrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A|b = 1 < 2 \\ \Rightarrow \text{unendlich viele Lösungen} \\ a \neq 4 \\ \hookrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A|b = 2 \\ \Rightarrow \text{eindeutig lösbar} \end{cases}$

Klausur 4.1.2

$$A = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 14 \\ 12 & 11 & 14 \\ 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $A \cdot B = C$

Benötigt wird ein LGS mit drei Gleichungen (pro Variable eine Zeile)

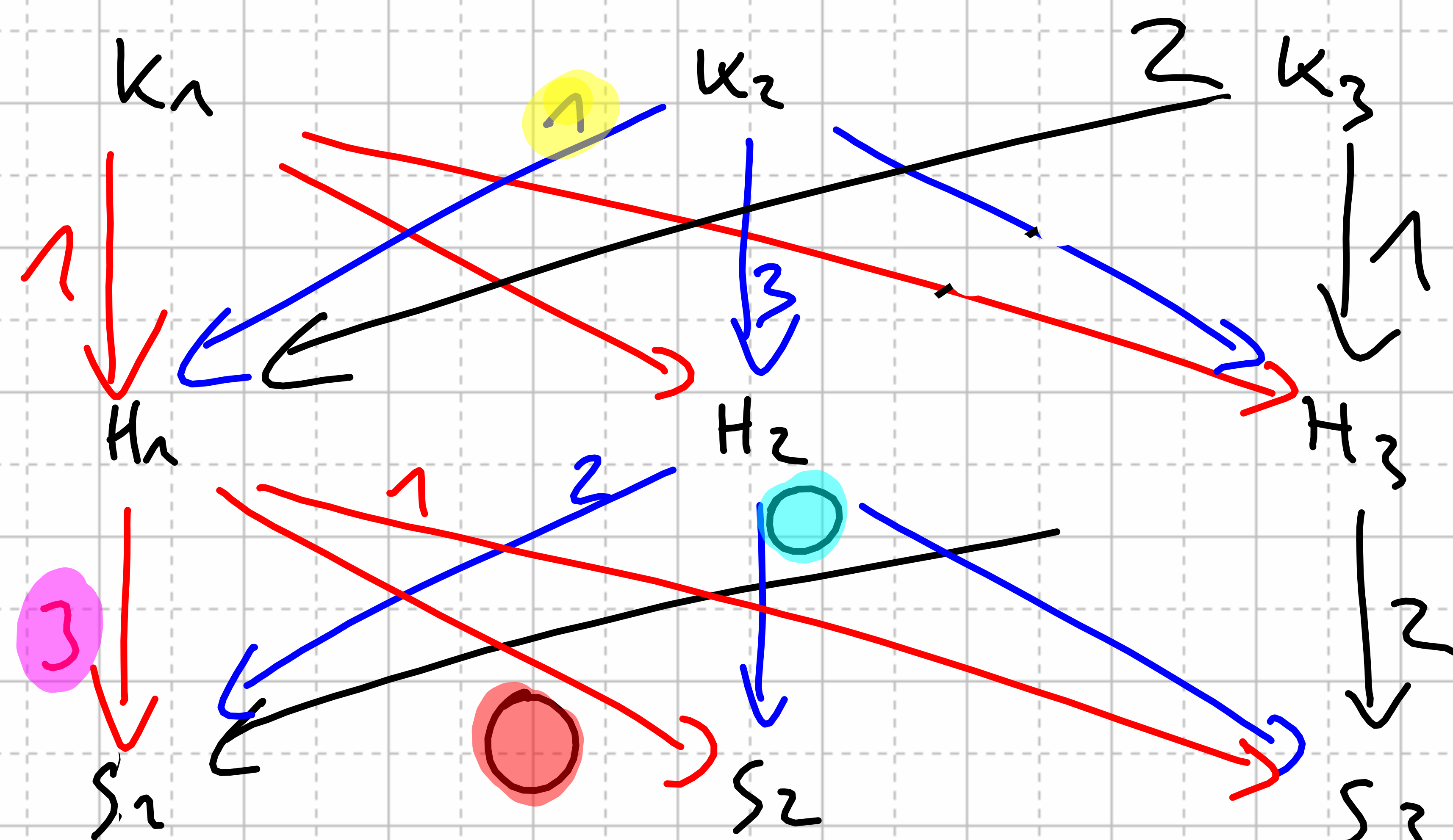
1. Zeile von A wird mit 1., 2., 3. Spalte von B multipliziert

$$\begin{array}{l} 1Z \times 1S \\ 1Z \times 2S \\ 1Z \times 3S \end{array} \left| \begin{array}{l} u \cdot 4 + v \cdot 0 + w \cdot 4 = 24 \\ u \cdot 1 + v \cdot 2 + w \cdot 0 = 6 \\ u \cdot 2 + v \cdot 2 + w \cdot 2 = 14 \end{array} \right| \overset{\text{solve}}{\Longleftrightarrow} (u = 4,\ v = 1,\ w = 2) \text{ oder } (u = 12,\ v = -3,\ w = -2)$$

Die erste Lösung mit drei nicht-negativen Werten ist die ökonomisch sinnvolle: $u = 4,\ v = 1,\ w = 2$

Klausur 1.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 10 & 11 & 6 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$



aus Diag
↳ Matrix A, B

aus Diag.
↳ Matrix B

kein Pfeil ≙ 0

1Z × 3S

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 3$

LGS 1Z · 2S
3Z · 2S

: $1 \cdot \; + 2 \cdot \; = 8$

$2 \cdot \; = 4$

⇔ $= 2$

$= 3$