



**Analysis: Ökonomische Anwendungen**  
**Herleitung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion**

Datum:  
Februar 2022

**Herleitung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion**

Ansatz:  $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Es muss gelten:  $a, c, d > 0$ ,  $b < 0$

**Weitere möglicherweise notwendige Funktionen:**

Grenzkosten (erste Ableitung):  $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

Zweite Ableitung:  $K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

Stückkostenfunktion:  $k(x) = K(x) / x = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + d/x$

Erste Ableitung der Stückkostenfunktion:  $k'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b - d/x^2$

Variable Kosten:  $K_V(x) = K(x) - K_{\text{fix}} = K(x) - d = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$

Variable Stückkostenfunktion:  $k_V(x) = K_V(x) / x = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Erste Ableitung der var. Stückkostenfunktion:  $k_V'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

**Übersetzungshilfen:**

- Die (Gesamt)kosten bei einer Menge von  $p$  ME betragen  $q$  GE  $\Rightarrow K(p) = q$
- Die Grenzkosten bei einer Menge von  $p$  ME betragen  $q$  GE  $\Rightarrow K'(p) = q$
- Bei  $p$  ME wechseln die Kostensteigerungen von degressiv zu progressiv  $\Rightarrow K''(p) = 0$
- Bei  $p$  ME ist der Übergang von sinkenden Grenzkosten zu steigenden Grenzkosten  $\Rightarrow K''(p) = 0$
- Bei  $p$  ME liegt der Wendepunkt von  $K(x) \Rightarrow K''(p) = 0$
- Die Stückkosten bei einer Menge von  $p$  ME betragen  $q$  GE  $\Rightarrow k(p) = q$
- Die variablen Kosten bei einer Menge von  $p$  ME betragen  $q$  GE  $\Rightarrow K_V(p) = q$
- Die var. Stückkosten bei einer Menge von  $p$  ME betragen  $q$  GE  $\Rightarrow k_V(p) = q$
- Das Betriebsminimum liegt bei  $p$  ME  $\Rightarrow k_V'(p) = 0$
- Das Betriebsoptimum liegt bei  $p$  ME  $\Rightarrow k'(p) = 0$
- Die Fixkosten betragen  $q$  GE  $\Rightarrow K(0) = q$

**Vorgehen:**

Aufstellen eines linearen Gleichungssystems mit vier Gleichungen (für jede Variable benötigt man eine Gleichung, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Das Gleichungssystem kann dargestellt werden als Gleichung  $A \cdot x = b$ , wobei  $A$  eine  $4 \times 4$ -Matrix ist und  $b$  der Lösungsvektor (als  $4 \times 1$ -Spaltenvektor). Der Vektor  $x$  ist ebenfalls ein  $4 \times 1$ -Spaltenvektor mit den Einträgen  $a, b, c$  und  $d$ .

Lösung des LGS mit dem Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix  $x = A^{-1} \cdot b$ .

CAS-Befehle: solve oder linsolve



**Analysis: Ökonomische Anwendungen**  
**Herleitung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion**

Datum:  
Februar 2022

**Übungsaufgaben (frühere Abituraufgaben)**

**Aufgabe 1:**

Bei der Produktion des LED-Leuchtmittels geht die ISERLED von einer ganzrationalen Kostenfunktion dritten Grades aus. Zur genaueren Bestimmung der Kostenfunktion liegen folgende Informationen vor:

- Bei einer Produktion von 4 ME belaufen sich die Gesamtkosten auf 48 GE.
- Bei einer Produktion von 8 ME ergeben sich variable Stückkosten in Höhe von 13 GE/ME.
- Bei einer Produktion von 6 ME belaufen sich die Grenzkosten auf 15 GE pro ME.
- Bei einer Produktion von 6 ME betragen die Stückkosten 11 GE pro ME.

Leiten Sie die Kostenfunktion her.

**Aufgabe 2:**

Die Pyrokomet GmbH stellt Feuerwerke aller Art her. Unter anderem werden Feuerwerksraketen, Tischfeuerwerke und Böllersortimente für unterschiedliche Anlässe – z. B. Hochzeiten – produziert. Der Produktentwickler erläutert, dass die Kosten zur Herstellung der Tischfeuerwerke mithilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modelliert werden können. Folgende Eckdaten liegen dazu vor:

- Bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME liegen die Gesamtkosten bei 270 GE.
- Das Betriebsminimum ergibt sich bei 10 ME.
- Die variablen Stückkosten in Höhe von 32 GE / ME werden bei einer Ausbringungsmenge von 20 ME erreicht.
- Die Grenzkosten bei 5 ME betragen 13,25 GE / ME.

Leiten Sie aus den Eckdaten die Gleichung der Kostenfunktion K her.

**Aufgabe 3:**

Die Rasolux GmbH produziert und vermarktet ein großes Sortiment an Gartengeräten und -maschinen. Darunter ist der Aufsitzmäher Goliath. Da Rasolux viele Mitbewerber hat, muss die GmbH als Polypolist ihre Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation aufmerksam verfolgen.

Die Unternehmensleitung möchte sich einen Überblick über die Kostenentwicklung bei unterschiedlichen Produktionsmengen des Aufsitzmähers Goliath verschaffen und geht von einem ertragsgesetzlichen Kostenverlauf aus.

- Die Fixkosten betragen 7 840 Geldeinheiten (GE).
- Bei einer Produktionsmenge von 2 Mengeneinheiten (ME) betragen die Gesamtkosten 10 800 GE und die Grenzkosten 1 080 GE / ME.
- Die variablen Stückkosten betragen 520 GE / ME, wenn 10 ME produziert werden.

Leiten Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion dritten Grades her.

**Lösungen:**

Aufgabe 1:  $K(x) = 0,5 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 21 \cdot x + 12$

Aufgabe 2:  $K(x) = 0,15x^3 - 3x^2 + 32x + 100$

Aufgabe 3:  $K(x) = 10x^3 - 240x^2 + 1920x + 7840$