

**Checkliste und Übungen für die Klausur am 09.12.2021****Ich kann im Teil A ohne Hilfsmittel**

- lineare Matrixgleichungen lösen.
- die Inverse Matrix zu einer 2x2-Matrix berechnen.
- Matrizen und Vektoren multiplizieren.
- für einen zweistufigen Produktionsprozess die relevanten Matrizen bestimmen und benennen.
- die Rangkriterien anwenden, um die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen.

Ich kann im Teil B

- Kosten, Erlöse, Gewinne und Mengen bei einem zweistufigen Produktionsprozess ermitteln.
- zu zwei gegebenen Matrizen im zweistufigen Produktionsprozess die fehlende Dritte berechnen (entweder durch Matrizenmultiplikation, falls C gesucht ist oder mit einer geeigneten inversen Matrix, falls A oder B gesucht sind).
- Innerhalb eines zweistufigen Produktionsprozesses für gegebene Parameter sinnvolle Definitionsbereiche ermitteln.
- lineare Gleichungssysteme lösen (z.B. um ein Lagerräumungsproblem zu lösen (auch mit Parametern)).
- mit Hilfe der Rangkriterien die Anzahl der Lösungen eines LGS bestimmen (keine, eine oder unendlich viele) und auch die Lösungen ermitteln.

Übungen ohne Hilfsmittel**Aufgabe 1: Lösen linearer Matrixgleichungen**

- a) $A \cdot X + B = C$ b) $X \cdot C = C$ c) $A \cdot X - X = B$
d) $X \cdot A = B$ e) $X - X \cdot A = B$ f) $B \cdot X = A$

Aufgabe 2: Inverse Matrizen bestimmen

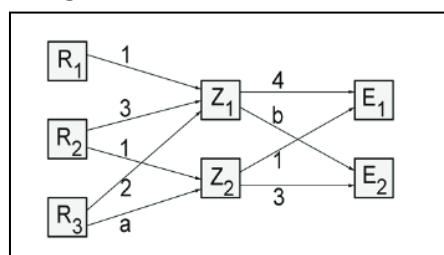
Bestimmen Sie die inverse Matrix.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Stellen Sie für einen zweistufigen Produktionsprozess die Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} auf. Bestimmen Sie dann die Werte für a, b und c, wenn gilt:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$



**Checkliste und Übungen für die Klausur am 09.12.2021****Aufgabe 4**

Im Lager befinden sich y_1 ME von R_1 und y_2 ME von R_2 . Die Mengen der einzelnen Endprodukte, die sich daraus herstellen lassen, können durch das folgende Gleichungssystem berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, dass es zu einem vorgegebenen Lagerbestand immer nur höchstens eine eindeutig bestimmte Mengenkombination an Endprodukten geben kann.

Lösungen

- 1) a) $X = A^{-1} \cdot (C-B)$ b) $X = E$ c) $X = (A-E)^{-1} \cdot B$
d) $X = B \cdot A^{-1}$ e) $X = B \cdot (E-A)^{-1}$ f) $X = B^{-1} \cdot A = X$

2) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ d)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-2}{13} \end{pmatrix}$$

- 3) $a = 4, b = 2, c = 13$
4) Mit Rangkriterium argumentieren, $\text{Rg}(A)=2=\text{rg}(A|b)=\text{Zeilenzahl von } A \Rightarrow$ Es existiert entweder keine Lösung oder genau eine Lösung. Dazu y_1 und y_2 vergleichen.

Übungen mit CAS**Aufgabe 1 (Rangkriterien mit Parameter)**

Ermitteln Sie, für welche reellen Zahlen anstelle von a die Matrixgleichung eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar oder unlösbar ist. (Sie müssen die Lösungen nicht angeben!) Begründen Sie Ihre Antworten!

a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & -3 \\ -8 & 6 & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Checkliste und Übungen für die Klausur am 09.12.2021

Aufgabe 2 (Zweistufige Produktionsprozesse)

- a) Buch S. 500, Beispiel 7.21 und Beispiel 7.22
- b) Buch S 503, „Alles klar?“ → Lösung auf Seite 661
- c) Die Bilster Möbel GmbH stellt aus drei verschiedenen Bauteilen B1, B2, B3 drei Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3 und aus diesen wiederum drei Endprodukte (die Schreibtische E1, E2, E3) her. Die Materialverflechtung ist den folgenden Matrizen zu entnehmen:

$$A_{BZ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C_{BE} = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 2 \\ 16 & 18 & 12 \\ 16 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Kosten und Verkaufspreise ergeben sich aus den folgenden Tabellen:

Kosten der Bauteile GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte GE/ME			Verkaufspreise der Endprodukte GE/ME		
B1	B2	B3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3	E1	E2	E3
1	2	3	2,5	3,3	2	17	23	19	150	145	90

- 1.) Interpretieren Sie die Bedeutung des Elements c_{32} in der Matrix C_{BE} im Sachzusammenhang.
 - 2.) Ein Kunde bestellt jeweils 100 ME von E1, E2 und E3. Berechnen Sie den Deckungsbeitrag für diesen Auftrag.
- d) Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen drei Zwischenprodukte her und daraus drei Endprodukte. Folgende Stücklisten sind gegeben:

	Z1	Z2	Z3		E1	E2	E3
R1	2	5	1	R1	19	41	54
R2	3	4	2	R2	22	43	61
R3	6	8	2	R3	42	76	104

- 1.) Ein Kunde bestellt 200 Z1, 150 Z2 und 400 Z3 und ein anderer Kunde bestellt 250 E1, 80 E2 und 125 E3. Ermitteln Sie den gesamten Rohstoffbedarf für beide Bestellungen.

2.) Ermitteln Sie B_{ZE} . Zur Kontrolle: $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$



Checkliste und Übungen für die Klausur am 09.12.2021

3.) Es gilt nun $C_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ein Kunde bestellt 137,5 ME E1, 65 ME E2 und 75 ME E3, ein weiterer Kunde bestellt 115 ME E1, 110 ME E2 und 30 ME E3. Zeigen Sie, dass für beide Bestellungen dieselben Rohstoffmengen benötigt werden, und bestimmen Sie eine weitere Bestellmengenkombination, für die ebenfalls diese Rohstoffmengen benötigt werden.

- 3.) Im Folgenden ist der Parameter t ein produktionsbedingter Parameter, der auf die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C_{RE} Einfluss nimmt:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 4+t & 3 \\ 2 & 2-t & 1 \\ 2 & 3 & 4-2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Geben Sie den sinnvollen Definitionsbereich von t bezüglich der Matrix C_{RE} an.

- 4.) Im Lager befinden sich noch 2000 ME von R1, 900 ME von R2 und 2250 ME von R3. Bestimmen Sie den sinnvollen Definitionsbereich für t bezüglich der Produktionsmengen.
- 5.) Bestimmen Sie den sinnvollen Definitionsbereich für t bezüglich der Matrix C_{RE} **und** der Produktionsmengen.