BKCR – Berufskolleg Castrop-Rauxel	WGY13 – Mathematik LK **Checkliste und Übungen für die Klausur am 09.12.2021** **Lösungen**	Datum:

Ich kann im Teil A ohne Hilfsmittel

- Matrizen und Vektoren multiplizieren.
- für einen zweistufigen Produktionsprozess die relevanten Matrizen bestimmen und benennen.
- die Rangkriterien anwenden, um die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen.

Übungen ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1

a) $A\cdot X + B = C$ |-B ⇔ $A\cdot X = C - B$ | $\cdot A^{-1}$ von links ⇔ $A^{-1}\cdot A \cdot X = A^{-1}\cdot(C-B)$ ⇔ $E\cdot X = A^{-1}\cdot(C-B)$ ⇔ $X = A^{-1}\cdot(C-B)$

b) $X\cdot C = C$ ⇔ $X = E$, denn $E\cdot C = C$

c) $A\cdot X - X = B$ |X nach rechts ausklammern ⇔ $(A-E)\cdot X = B$ | $\cdot (A-E)^{-1}$ von links ⇔ $(A-E)^{-1}\cdot (A-E)\cdot X = (A-E)^{-1}\cdot B$ ⇔ $X = (A-E)^{-1}\cdot B$

d) $X\cdot A = B$ | $\cdot A^{-1}$ von rechts ⇔ $X\cdot A\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1}$ ⇔ $X = B\cdot A^{-1}$

d) $X - X\cdot A = B$ |X nach links ausklammern ⇔ $X\cdot(E-A) = B$ | $\cdot (E-A)^{-1}$ von rechts ⇔ $X = B\cdot (E-A)^{-1}$

e) $B\cdot X = A$ | $\cdot B^{-1}$ von links ⇔ $X = B^{-1}\cdot A$

Aufgabe 2: Inverse Matrizen bestimmen

Bestimmen Sie die inverse Matrix.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \,|\cdot(-2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & -10 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \,|+II \; \begin{vmatrix} -4 & -10 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \,|\cdot(-2,5)$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} -4 & -10 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & -2{,}5 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ |\cdot + I \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} -4 & 0 & 3 & -2{,}5 \\ 0 & 10 & 5 & -2{,}5 \end{array}\right| \begin{array}{l} |:(-4) \\ |:10 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -0{,}75 & 0{,}625 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}25 \end{array}\right| \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}75 & 0{,}625 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} |\cdot 3 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} |+II \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} |:3 \\ |:5 \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{array}\right|$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} |-II \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ |\cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ |+I \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ |:(-2) \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} |\cdot(-2{,}5) \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} -5 & -7{,}5 & -2{,}5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} |+II \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6{,}5 & -2{,}5 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} |\cdot 6{,}5 \\ |\cdot 3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6{,}5 & -2{,}5 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} |\cdot 6{,}5 \\ |\cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 13 & 19{,}5 & 6{,}5 & 0 \\ 0 & -19{,}5 & -7{,}5 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ |+I \end{array} \Leftrightarrow$$

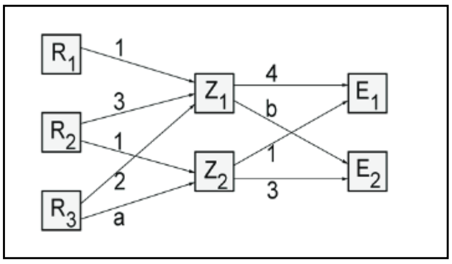
$$\left|\begin{array}{cccc|l} 13 & 0 & -1 & 3 & |:13 \\ 0 & -19{,}5 & -7{,}5 & 3 & |:19{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{-1}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-7{,}5}{19{,}5} & \frac{3}{19{,}5} \end{array}\right| \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-5}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\frac{-15}{2}}{\frac{39}{2}} = \frac{-15}{2} \cdot \frac{2}{39} = \frac{-15}{39} = \frac{-5 \cdot 3}{13 \cdot 3} = \frac{-5}{13} \text{ und } \frac{\frac{6}{2}}{\frac{39}{2}} = \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{39} = \frac{6}{39} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 13} = \frac{2}{13}$$

Aufgabe 3

Stellen Sie für einen zweistufigen Produktionsprozess die Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} auf. Bestimmen Sie dann die Werte für a, b und c, wenn gilt:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$



$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \text{ und } B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = C_{RE}$

Zeile 1 von A x Spalte 2 von B = Eintrag in Zeile 1 und Spalte 2 von C

$1 \cdot b + 0 \cdot 3 = 2 \Leftrightarrow$ b = 2

Zeile 2 von A x Spalte 1 von B = Eintrag in Zeile 2 und Spalte 1 von C

$3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = c \Leftrightarrow$ 13 = c

Zeile 3 von A x Spalte 1 von B = Eintrag in Zeile 3 und Spalte 1 von C

$2 \cdot 4 + a \cdot 1 = 12 \Leftrightarrow 8 + a = 12 \;|-8 \Leftrightarrow a = 4$

Aufgabe 4

Im Lager befinden sich y_1 ME von R_1 und y_2 ME von R_2.
Die Mengen der einzelnen Endprodukte, die sich daraus herstellen lassen, können durch das folgende Gleichungssystem berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, dass es zu einem vorgegebenen Lagerbestand immer nur höchstens eine eindeutig bestimmte Mengenkombination an Endprodukten geben kann.

Tipp: Rangkriterien verwenden!

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 & y_1 \\ 4 & 2 & y_2 \end{vmatrix} |\,(-2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 8 & 12 & y_1 \\ -8 & -4 & -2y_2 \end{vmatrix} |+II \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 8 & 12 & y_1 \\ 0 & 8 & y_1 - 2y_2 \end{vmatrix}$$

Rg (A) = 2 = Rg (A|b) = Zeilenzahl von A => Die Lösung ist mathematisch eindeutig!
Ökonomisch muss sichergestellt werden, dass die Lösung nur positive Werte hat, da es sich um Mengen handelt. Das heißt $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$.
Also muss 1.) $y_1 \geq 0$ und $y_2 \geq 0$ gelten und natürlich auch
2.) $y_1 - 2y_2 \geq 0 \;|+2y_2 \Leftrightarrow y_1 \geq 2y_2$

Erster Fall: Wenn eine der drei Bedingungen nicht erfüllt ist, gibt es nur eine mathematische Lösung, die aber ökonomisch nicht sinnvoll ist.

Zweiter Fall: Wenn alle drei Bedingungen erfüllt sind, gibt es genau eine Lösung, die auch ökonomisch sinnvoll ist.

⇨ Es gibt höchstens eine (keine oder eine) eindeutige Lösung (eine bestimmte Mengenkombination) zur Lösung des Gleichungssystems (zur Lagerräumung).