| | | |
|---|---|---|
| | WGY13 – Mathematik Leistungskurs<br>**Stochastische Matrizen**<br>**Grundlagen und Einführung am Beispiel von Mietwagenbewegungen** | Datum: |

## Stochastische Matrizen

Eine Matrix heißt stochastische Matrix, wenn

- sie quadratisch ist und
- alle Einträge zwischen 0 und 1 sind, wobei 0 und 1 auch möglich sind und
- die Spaltensummen in allen Spalten gleich 1 sind.

Beispiele:

$S = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,25 & 0,05 & 0,7 \\ 0,55 & 0,45 & 0,2 \end{pmatrix}$ ist eine stochastische Matrix.

- quadratisch ✔
- alle Einträge zwischen 0 und 1 ✔
- Spaltensummen gleich 1 ✔

$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0,1 \\ 0,25 & 0,05 & 0,7 \\ 0,55 & 0,45 & 0,2 \end{pmatrix}$ ist **keine** stochastische Matri

- quadratisch ✔
- alle Einträge zwischen 0 und 1 ✔
- Spaltensummen gleich 1 ↯ (2. Spalte 1,3)

## Verwendung

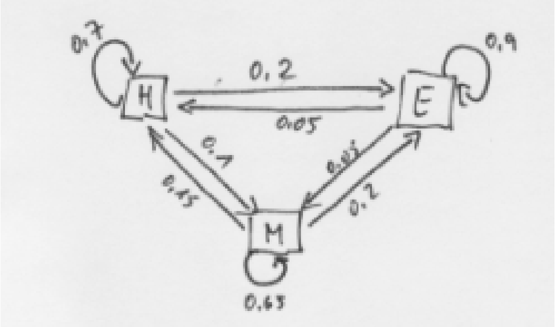
Stochastische Matrizen werden benötigt, um Übergänge zwischen zwei sogenannten Zuständen zu beschreiben. Beispiele:

- Wählerwanderungen zwischen Parteien
- Abstellorte von Leihfahrrädern, Mietwagen oder E-Scootern
- Marktanteile von konkurrierenden Unternehmen

Die Bewegungen werden in Form von Tabellen oder Diagrammen dargestellt:

**Beispiele: Standorte eines Mietwagenunternehmens (Zahlen aus „Alles klar? Buch Seite 567)**

| Von →<br>Nach ↓ | Hamburg | Essen | München |
|---|---|---|---|
| Hamburg | 0,7 | 0,05 | 0,15 |
| Essen | 0,2 | 0,9 | 0,2 |
| München | 0,1 | 0,05 | 0,65 |




E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info

**Rechnung:**

Ausgehend von einem Startzustand Startvektor $v_0$ kann mit Hilfe einer stochastischen Matrix S der nächste Zustand $v_1$ berechnet werden, indem die Matrix S mit dem Zustandsvektor $v_0$ multipliziert wird:

Zustand 1: $S \cdot v_0 = v_1$ Zustand 2: $S \cdot v_1 = v_2$ Zustand 3: $S \cdot v_2 = v_3$ Zustand 4: $S \cdot v_3 = v_4$

Die Aneinanderreihung der Zustandsvektoren $v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, … nennt man eine Markov-Kette.

**Beispiel: („Alles klar? Buch Seite 567)**

Startzustand $v_0 = \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \\ 110 \end{pmatrix}$

Das ist die Anzahl der Autos am 5. Juni in Hamburg (90), Essen (70) und München (110).

Stochastische Übergangsmatrix $S = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,05 & 0,15 \\ 0,2 & 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,05 & 0,65 \end{pmatrix}$

**Zustand 1** (Anzahl der Autos nach einer Woche): $v_1 = S \cdot v_0$

$$S \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,05 & 0,15 \\ 0,2 & 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,05 & 0,65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \cdot 0,7 + 70 \cdot 0,05 + 110 \cdot 0,15 \\ 90 \cdot 0,2 + 70 \cdot 0,9 + 110 \cdot 0,2 \\ 90 \cdot 0,1 + 70 \cdot 0,05 + 110 \cdot 0,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \\ 103 \\ 84 \end{pmatrix} = v_1$$

Erläuterung der Rechnung am Beispiel der 1. Zeile:

90 Autos stehen in Hamburg, davon werden 70% also 90 · 0,7 = 63 Autos auch wieder am Ende der Woche in Hamburg zurückgegeben.

70 Autos stehen in Essen, davon werden 5%, also 70 · 0,05 = 3,5 Autos am Ende der Woche in Hamburg zurückgegeben.

110 Autos stehen in München, davon werden 15%, also 110 · 0,15 = 16,5 Autos am Ende der Woche in Hamburg zurückgegeben.

Die Summe ist 63 + 3,5 + 16,5 = 83.

**Anmerkung: Es kann vorkommen, dass am Ende gerundet werden muss (siehe Zustand 2)!**

**Zustand 2** (Anzahl der Autos nach zwei Wochen): $v_2 = S \cdot v_1$

$$S \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,05 & 0,15 \\ 0,2 & 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,05 & 0,65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 83 \\ 103 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \cdot 0,7 + 103 \cdot 0,05 + 84 \cdot 0,15 \\ 83 \cdot 0,2 + 103 \cdot 0,9 + 84 \cdot 0,2 \\ 83 \cdot 0,1 + 103 \cdot 0,05 + 84 \cdot 0,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75,85 \\ 126,1 \\ 68,05 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 76 \\ 126 \\ 68 \end{pmatrix} = v_2$$

Kontrolle der gerundeten Ergebnisse: 76+126+68 = 270 ✔

**Zustand 3** (Anzahl der Autos nach drei Wochen): $v_3 = S \cdot v_2$

$$S \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,05 & 0,15 \\ 0,2 & 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,05 & 0,65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 76 \\ 126 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \cdot 0,7 + 126 \cdot 0,05 + 68 \cdot 0,15 \\ 76 \cdot 0,2 + 126 \cdot 0,9 + 68 \cdot 0,2 \\ 76 \cdot 0,1 + 126 \cdot 0,05 + 68 \cdot 0,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,7 \\ 142,2 \\ 58,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 70 \\ 142 \\ 58 \end{pmatrix} = v_3$$

Kontrolle der gerundeten Ergebnisse: 70+142+58 = 270 ✔

Die Auflistung der Zustände nennt man **Markov-Kette**:

$$v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots = \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \\ 110 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 83 \\ 103 \\ 84 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 76 \\ 126 \\ 68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 70 \\ 142 \\ 58 \end{pmatrix}, \ldots$$

Beobachtung: Ohne Eingreifen der Autovermietung werden irgendwann alle Autos in Essen stehen, wenn sich das Kundenverhalten und somit die Wahrscheinlichkeiten aus der stochastischen Matrix nicht ändern.

**<u>Fixvektor</u>**

Fragestellung: Gibt es einen Zustandsvektor v*, so dass sich am Ende der Woche überall so viele Autos an den drei Standorten befinden wie am Anfang der Woche? Wenn so ein Vektor existiert, nennt man ihn Fixvektor.

Ansatz: S · v* = v* muss nach v* aufgelöst werden.
S · v* = v* ⇔ S · v* = E · v* |- E·v* ⇔ S · v* – E · v* = 0 |v* nach rechts ausklammern
⇔ (S – E) · v* = 0

Das entstehende lineare Gleichungssystem kann mit dem CAS mit den Befehlen linsolve oder solve gelöst werden.

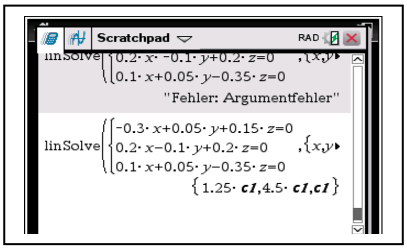
$v^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1$: Anz. Autos in Hamburg, $x_2$: Anz. Autos in Essen und $x_3$ = Anz. Autos in München

$$S - E = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,05 & 0,15 \\ 0,2 & 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,05 & 0,65 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,05 & 0,15 \\ 0,2 & -0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,05 & -0,35 \end{pmatrix}$$

$$(S-E)\cdot v^* = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,3 & 0,05 & 0,15 \\ 0,2 & -0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,05 & -0,35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,30x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0 \\ 0,20x_1 - 0,10x_2 + 0,20x_3 = 0 \\ 0,10x_1 + 0,05x_2 - 0,35x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

Mit CAS:

$$v^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25\cdot t \\ 4,5\cdot t \\ t \end{pmatrix}, t \geq 0$$




In der Praxis nimmt man üblicherweise den Buchstaben t statt c1, wie im CAS c1.

Je nach Aufgabe und Bedeutung der Variablen muss darauf geachtet werden, dass die Lösungen positiv oder ganzzahlig sind oder eine bestimmte Vorgabe erfüllen. In dieser Aufgabe hat die Firma 270 Autos, die vermietet werden, das heißt t muss so bestimmt werden, dass die Summe der Autos gleich 270 ist und alle Lösungen ganzzahlig sind:

$1{,}25\cdot t + 4{,}5\cdot t + t = 270 \Leftrightarrow 6{,}75 \cdot t = 270 \,|\, :6{,}75 \Leftrightarrow t = 40$

<u>**Lösung:**</u> In Hamburg müssen $1{,}25\cdot 40 = 50$, in Essen $4{,}5\cdot 40 = 180$ und in München 40 Autos stehen. Dann stehen am Ende der Woche in allen Standorten so viele Autos wie zu Beginn der Woche.

Fixvektor: $v^* = \begin{pmatrix} 50 \\ 180 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ und } S\cdot v^* = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 180 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 180 \\ 40 \end{pmatrix} = v^*$

## <u>Effiziente Berechnung der einzelnen Zustände</u>

Für die Berechnung eines Zustands $v_n$ ist es bei der bisherigen Betrachtung immer notwendig, den vorherigen Zustand $v_{n-1}$ zu kennen: $v_n = S\cdot v_{n-1}$

Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass man $v_n$ auch nur mit der stochastischen Matrix S und der Startverteilung $v_0$ bestimmen kann.

$v_1 = S\cdot v_0$

$v_2 = S\cdot v_1 = S\cdot S\cdot v_0 = S^2\cdot v_0$

$v_3 = S\cdot v_2 = S\cdot S\cdot v_1 = S\cdot S\cdot S\cdot v_0 = S^3\cdot v_0$

$v_4 = S\cdot v_3 = S\cdot S\cdot v_2 = S\cdot S\cdot S\cdot v_1 = S\cdot S\cdot S\cdot S\cdot v_0 = S^4\cdot v_0$

$\Rightarrow$ $\mathbf{v_n = S^n \cdot v_0}$