

# Die Binomischen Formeln

$$1) \quad \underline{(a+b)^2} = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + \underbrace{ba}_{=ab} + b^2 = \underline{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$2) \quad \underline{(a-b)^2} = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - ab - \underbrace{ba}_{=ab} + b^2 = \underline{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$3) \quad \underline{(a+b) \cdot (a-b)} = a^2 - ab + \underbrace{ba}_{=ab} - b^2 = \underline{a^2 - b^2}$$

Bsp:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9 \\ (y-7)^2 &= y^2 - 2 \cdot y \cdot 7 + 7^2 = y^2 - 14y + 49 \\ (6-z)^2 &= 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot z + z^2 = 36 - 12z + z^2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 1:** Rechnen Sie aus!

- |                        |                        |                            |
|------------------------|------------------------|----------------------------|
| a) $(a+2)^2$           | b) $(6-b)^2$           | c) $(x+3)^2$               |
| d) $(x-5)^2$           | e) $(3+2x)^2$          | f) $(11-x)^2$              |
| g) $(4y-3,5)^2$        | h) $(2,4-t)^2$         | i) $(15-\beta)^2$          |
| j) $(x-2) \cdot (x+2)$ | k) $(5+y) \cdot (5-y)$ | l) $(2x+3y) \cdot (2x-3y)$ |

**Aufgabe 2:** Ergänzen Sie!

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| a) $(\quad - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ | b) $(\quad + 1)^2 = b^2 + 2b + 1$      |
| c) $(3 + \quad)^2 = 9 + 6t + t^2$  | d) $(x - \quad)^2 = x^2 - 12x + \quad$ |
| e) $(\quad)^2 = x^2 + 16x + 64$    | f) $(\quad)^2 = y^2 - \quad + 100$     |

**Aufgabe 3:** Ergänzen Sie!

- |                                    |                                     |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $x^2 + 3x + \quad = (\quad)^2$  | b) $x^2 - 14x + \quad = (\quad)^2$  |
| c) $c^2 - 28c + \quad = (\quad)^2$ | d) $z^2 + \quad = (\quad + 3)^2$    |
| e) $x^2 + 5x + \quad = (\quad)^2$  | f) $x^2 - 6,5x + \quad = (\quad)^2$ |
| g) $x^2 + x + \quad = (\quad)^2$   | h) $x^2 - 4x + \quad = (\quad)^2$   |

**Warum machen wir das eigentlich?****Problem Nr. 1:**

Wenn wir für einen monopolistischen Anbieter ausrechnen wollen, welcher Preis bestimmt werden muss, damit der **Gewinn maximal** wird, benötigen wir dafür den **Scheitelpunkt der Gewinnparabel**, denn der x-Wert dieses Scheitelpunktes gibt an, bei welcher Absatzmenge das passiert!

**Problem Nr. 2:**

Wenn wir für einen monopolistischen Anbieter ausrechnen wollen, bei welchen Absatzmengen Gewinn erzielt wird (die sogenannte **Gewinnzone**), benötigen wir die Nullstellen der Gewinnparabeln, das heißt, wir müssen die Gleichung  $G(x) = 0$  lösen.

Die Lösung beider Probleme hängt mit der quadratischen Ergänzung binomischer Formeln zusammen!

$$a) (a+2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2$$

$$= a^2 + 4a + 4$$

$$b) (6-b)^2 = 6^2 - 6b - 6b + b^2$$

$$= 36 - 12b + b^2$$

$$c) (x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

$$d) (x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$$

$$= x^2 - 10x + 25$$

$$e) (3+2x)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2x + (2x)^2$$

$$= 9 + 12x + 4x^2$$

$$f) (11-x)^2 = 121 - 22x + x^2$$

$$g) (4y-3,5)^2 = (4y)^2 - 2 \cdot 4y \cdot 3,5 + 3,5^2$$

$$= 16y^2 - 28y + 12,25$$

**Aufgabe 2:** Ergänzen Sie!

a)  $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

b)  $(b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1$

c)  $(3 + t)^2 = 9 + 6t + t^2$

d)  $(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$

e)  $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$

f)  $( )^2 = y^2 - \quad + 100$

**Aufgabe 3:** Ergänzen Sie!

a)  $x^2 + 3x + 2,25 = (x + 1,5)^2$

b)  $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$

c)  $c^2 - 28c + 196 = (c - 14)^2$

d)  $z^2 + 6z + 9 = (z + 3)^2$

e)  $x^2 + 5x + 6,25 = (x + 2,5)^2$

f)  $x^2 - 6,5x + 10,5625 = (x - 3,25)^2$

g)  $x^2 + x + 0,25 = (x + 0,5)^2$

h)  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

**Warum machen wir das eigentlich?**

**Problem Nr. 1:**

Wenn wir für einen monopolistischen Anbieter ausrechnen wollen, welcher Preis bestimmt werden muss, damit der **Gewinn maximal** wird, benötigen wir dafür den **Scheitelpunkt der Gewinnparabel**, denn der x-Wert dieses Scheitelpunktes gibt an, bei welcher Absatzmenge das passiert!

**Problem Nr. 2:**

Wenn wir für einen monopolistischen Anbieter ausrechnen wollen, bei welchen Absatzmengen Gewinn erzielt wird (die sogenannte **Gewinnzone**), benötigen wir die Nullstellen der Gewinnparabeln, das heißt, wir müssen die Gleichung  $G(x) = 0$  lösen.

Die Lösung beider Probleme hängt mit der quadratischen Ergänzung binomischer Formeln zusammen!

3a)  $\frac{3}{2} = 1,5$     3b)  $\frac{14}{2} = 7$

3g)  $x = 1 \cdot x \Rightarrow \frac{1}{2} = 0,5$

d)  $(x - 6)^2 = x^2 + \underbrace{12 \cdot x}_{2 \cdot x \cdot 6} + 6^2$  WAB 11d,  
17.11.21

Rechnung  $\frac{12}{2} = \underline{\underline{6}}$

e)  $(x + 8)^2 = x^2 + \underbrace{16x}_{2 \cdot x \cdot 8} + 8^2$

Rechnung:  $\frac{16}{2} = 8$     Rechnung  $\sqrt{64} = 8$

f)  $(y - 10)^2 = y^2 - \underbrace{20y}_{2 \cdot y \cdot 10} + 10^2$

Rechnung  $\sqrt{100} = 10$

Umwandeln der allgemeinen Form in die Scheitelpunktform:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1. Schritt: a ausklammern

$$\Leftrightarrow f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

2. Schritt: in der Klammer eine geeignete quadratische Ergänzung finden, so dass ein Teil einer binomischen Gleichung entsteht, und diese sofort wieder abziehen:

HAQUAD mit der Zahl vor dem x, also  $\frac{b}{a}$

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

3. Schritt: zu binomischer Formel zusammenfassen

$$f(x) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

4. Schritt: a wieder mit der Klammer multiplizieren und Scheitelpunkt ablesen

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{-b}{2a} / \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Alternativ könnte man auch  $x_s$  in die Funktion einsetzen:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

Beispiel:  $f(x) = -2x^2 + 12x - 4$

1. Schritt: a ausklammern

$$\Leftrightarrow f(x) = -2 \cdot (x^2 - 6x + 2)$$

2. Schritt: in der Klammer eine geeignete quadratische Ergänzung finden, so dass ein Teil einer binomischen Gleichung entsteht, und diese sofort wieder abziehen:

HAQUAD mit der Zahl vor dem x, also -6

$$f(x) = -2 \cdot (x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2)$$

3. Schritt: zu binomischer Formel zusammenfassen

$$f(x) = -2 \cdot ((x - 3)^2 - 7)$$

4. Schritt: a wieder mit der Klammer multiplizieren und Scheitelpunkt ablesen

$$-2 \cdot (x - 3)^2 + 14$$

$$\Rightarrow S(3/14)$$

Kontrolle mit Formel:

$$a = -2; b = 12; c = -4$$

$$x_s = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-12}{2 \cdot (-2)} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$y_s = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot (-2) \cdot (-4) - 12^2}{4 \cdot (-2)} = \frac{-112}{-8} = 14$$

Alternativ könnte man auch  $x_s$  in die Funktion einsetzen:  $f(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 4 = 14$

Am Beispiel:  $f(x) = -2x^2 + 10x + 100$

$$f(x) = -2x^2 + 10x + 100 \quad | \quad -2 \text{ ausklammern}$$

$$= -2 \cdot \left[ x^2 - 5x - 50 \right]$$

$= \frac{10}{-2} \quad = \frac{100}{-2}$

$$= -2 \cdot \left[ x^2 - 5x + 2,5^2 - 2,5^2 - 50 \right]$$

$$= -2 \cdot \left[ (x - 2,5)^2 - 56,25 \right]$$

$$= -2 \cdot (x - 2,5)^2 + 112,5$$

x-Wert vom Scheitelpunkt

y-Wert vom Scheitelpunkt

$$S(2,5 / 112,5)$$

### Übungen Scheitelpunkte

In den folgenden Aufgaben haben Sie die Preis-Absatz-Funktion  $p(x)$  und die quadratische Gewinnfunktion eines monopolistischen Anbieters gegeben.

- a)  $p(x) = -0,5x + 6$  und  $G(x) = -0,5x^2 + 5,5x - 12$   
b)  $p(x) = -0,2x + 2$  und  $G(x) = -0,2x^2 + 1,8x - 1,6$   
c)  $p(x) = -0,5x + 3,5$  und  $G(x) = -0,5x^2 + 3x - 2,5$   
d)  $p(x) = -0,5x + 30$  und  $G(x) = -0,5x^2 + 18x - 15$   
e)  $p(x) = -4\,000x + 40\,000$  und  $G(x) = -4\,000x^2 + 36\,000x - 32\,000$   
f)  $p(x) = -0,00025x + 12,5$  und  $G(x) = -0,00025x^2 + 9x - 12,5$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie für die Funktionen der Aufgaben a) bis f) den Scheitelpunkt der Gewinnfunktion, indem Sie die Gewinnfunktion in die Scheitelpunktform umformen.

Aufgabe 2:

Der  $x$ -Wert des Scheitelpunktes aus Aufgabe 1 gibt die gewinnmaximale Absatzmenge an. Ermitteln Sie für die Funktionen der Aufgaben a) bis f) den Preis, den der monopolistische Anbieter festlegen muss, um maximalen Gewinn zu erzielen.

### Kontrollergebnisse der Preise

| Aufgabe                             | A    | B    | C    | D     | E         | F    |
|-------------------------------------|------|------|------|-------|-----------|------|
| Preis für maximalen Gewinn in GE/ME | 3,25 | 1,10 | 2,00 | 21,00 | 22 000,00 | 8,00 |

### Erinnerung an Wurzeln

**Aufgabe:** Lösen Sie!

a)  $\sqrt{5^2} =$

b)  $\sqrt{3752^2} =$

c)  $\sqrt{x^2} =$

d)  $\sqrt{t^2} =$

e)  $\sqrt{(x-6)^2} =$

f)  $\sqrt{(x+1)^2} =$

### Die pq-Formel

Wenn  $x^2 + p \cdot x + q = 0$  dann gilt:  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}$