Anhand der Scheitelpunktform $f(x) = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$ kann man den Scheitelpunkt S (x_s / y_s) ablesen.

Umwandeln der allgemeinen Form in die Scheitelpunktform:

$f(x) = ax^2 + bx + c$	Beispiel: $f(x) = -2x^2 + 12x - 4$
1. Schritt: a ausklammern $\Leftrightarrow f(x) = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$	1. Schritt: a ausklammern $\Leftrightarrow f(x) = -2\cdot(x^2 - 6x + 2)$
2. Schritt: in der Klammer eine geeignete quadratische Ergänzung finden, so dass ein Teil einer binomischen Gleichung entsteht, und diese sofort wieder abziehen: HAQUAD mit der Zahl vor dem x, also $\frac{b}{a}$ $f(x) = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a})$	2. Schritt: in der Klammer eine geeignete quadratische Ergänzung finden, so dass ein Teil einer binomischen Gleichung entsteht, und diese sofort wieder abziehen: HAQUAD mit der Zahl vor dem x, also -6 $f(x) = -2\cdot(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2)$
3. Schritt: zu binomischer Formel zusammenfassen $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$	3. Schritt: zu binomischer Formel zusammenfassen $f(x) = -2\left((x-3)^2 - 7\right)$
4. Schritt: a wieder mit der Klammer multiplizieren und Scheitelpunkt ablesen $f(x) = a\cdot\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ $\Rightarrow S\left(\frac{-b}{2a} / \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ Alternativ könnte man auch x_s in die Funktion einsetzen: $f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right)$	4. Schritt: a wieder mit der Klammer multiplizieren und Scheitelpunkt ablesen $-2\cdot(x-3)^2 + 14$ $\Rightarrow S(3/14)$ Kontrolle mit Formel: a = -2; b = 12; c = -4 $x_s = \frac{-b}{2\cdot a} = \frac{-12}{2\cdot(-2)} = \frac{-12}{-4} = 3$ $y_s = \frac{4\cdot a\cdot c - b}{4a} = \frac{4\cdot(-2)\cdot(-4) - 12^2}{4\cdot(-2)} = \frac{-112}{-8} = 14$ Alternativ könnte man auch x_s in die Funktion einsetzen: $f(3) = -2\cdot 3^2 + 12\cdot 3 - 4 = 14$

a) $G(x) = -0{,}5x^2 + 5{,}5x - 12$

$= -0{,}5\cdot\left[x^2 - 11x + 24\right]$

$\frac{5{,}5}{-0{,}5}$ $\quad \frac{-12}{-0{,}5}$

$= -0{,}5\cdot\left[x^2 - 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 24\right]$

$= -0{,}5\cdot\left[(x - 5{,}5)^2 - 6{,}25\right]$

$= -0{,}5\cdot(x - 5{,}5)^2 + 3{,}125$

$\Rightarrow S(5{,}5 / 3{,}125)$

↳ Tafel 3

Übungen Scheitelpunkte

In den folgenden Aufgaben haben Sie die Preis-Absatz-Funktion p(x) und die quadratische Gewinnfunktion eines monopolistischen Anbieters gegeben.

a) $p(x) = -0{,}5x + 6$ und $G(x) = -0{,}5x^2 + 5{,}5x - 12$
b) $p(x) = -0{,}2x + 2$ und $G(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}8x - 1{,}6$
c) $p(x) = -0{,}5x + 3{,}5$ und $G(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$
d) $p(x) = -0{,}5x + 30$ und $G(x) = -0{,}5x^2 + 18x - 15$
e) $p(x) = -4\,000x + 40\,000$ und $G(x) = -4\,000x^2 + 36\,000x - 32\,000$
f) $p(x) = -0{,}00025x + 12{,}5$ und $G(x) = -0{,}00025x^2 + 9x - 12{,}5$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie für die Funktionen der Aufgaben a) bis f) den Scheitelpunkt der Gewinnfunktion, indem Sie die Gewinnfunktion in die Scheitelpunktform umformen.

Aufgabe 2:

Der x-Wert des Scheitelpunktes aus Aufgabe 1 gibt die gewinnmaximale Absatzmenge an. Ermitteln Sie für die Funktionen der Aufgaben a) bis f) den Preis, den der monopolistische Anbieter festlegen muss, um maximalen Gewinn zu erzielen.

Kontrollergebnisse der Preise

Aufgabe	A	B	C	D	E	F
Preis für maximalen Gewinn in GE/ME	3,25	1,10	2,00	21,00	22 000,00	8,00

Erinnerung an Wurzeln

Aufgabe: Lösen Sie!

a) $\sqrt{5^2} =$ b) $\sqrt{3752^2} =$ c) $\sqrt{x^2} =$

d) $\sqrt{t^2} =$ e) $\sqrt{(x-6)^2} =$ f) $\sqrt{(x+1)^2} =$

Die pq-Formel

Wenn $x^2 + p \cdot x + q = 0$ dann gilt: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Fortsetzung Aufgabe a)

Scheitelpunkt von $G(x)$: $S(5{,}5 \mid 3{,}125)$

Der Monopolist macht einen maximalen Gewinn von 3,125 GE wenn er 5,5 ME verkauft. Man nennt $x = 5{,}5$ die gewinnmaximale Menge.

Bestimmung des Preises: Einsetzen der gewinnmaximalen Menge $x = 5{,}5$ in Preisabsatzfunktion $p(x)$

$$p(x) = -0{,}5x + 6 \Rightarrow p(5{,}5) = -0{,}5 \cdot 5{,}5 + 6 = \underline{\underline{3{,}25}}$$

Der Monopolist muss einen Preis von 3,25 GE/ME festlegen, damit er 5,5 ME verkauft und einen maximalen Gewinn von 3,125 GE erzielt!

Die Kombination aus gewinnmaximaler Menge und Preis heißt Cournotscher Punkt $(5{,}5 \mid 3{,}25)$. Er liegt auf der Preisabsatzfunktion.

Scheitelpunktform

$$G(x) = -0{,}5x^2 + 20x - 10$$

$$= -0{,}5 \cdot \left[\underbrace{\frac{-0{,}5}{-0{,}5}}_{=1} x^2 + \underbrace{\frac{20}{-0{,}5}}_{=-40} x - \underbrace{\frac{10}{-0{,}5}}_{=20}\right]$$

Zahl vor x^2 ausklammern und alle Zahlen durch diese Zahl teilen

$$= -0{,}5 \cdot \left[x^2 - 40x + 20\right]$$

Zahl vor x halbieren, quadrieren addieren und sofort subtrahieren

$$= -0{,}5 \cdot \left[x^2 - 40x + 20^2 - 20^2 + 20\right]$$

$$+\left(\frac{40}{2}\right)^2 - \left(\frac{40}{2}\right)^2$$

Die ersten drei Summanden zu binomischer Formel zusammen!

$$= -0{,}5 \cdot \left[(x-20)^2 - 380\right]$$

Die am Anfang ausgeklammerte Zahl wieder mit eckiger Klammer multiplizieren!

$$= -0{,}5 \cdot (x-20)^2 \underbrace{+190}_{=-0{,}5\cdot(-380)}$$

$$S(20\,|\,190)$$