Die binomischen Formeln

1.) $(a + b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$
2.) $(a - b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$
3.) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Beispielaufgaben:

1. $(x + 4)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$
2. $(y - 10)^2 = y^2 - 2\cdot y\cdot 10 + 10^2 = y^2 - 20y + 100$
3. $(3a + 2)^2 = (3a)^2 + 2\cdot 3a\cdot 2 + 2^2 = 9a^2 + 12a + 4$
   Achtung: Bei $(3a)^2$ müssen die „3" und das „a" quadriert werden: $(3a)^2 = 3^2\cdot a^2 = 9a^2$
4. $(6 - 2b)^2 = 6^2 - 2\cdot 6\cdot 2b + (2b)^2 = 36 - 24b + 4b^2$
   Achtung: Bei $(2b)^2$ muss die „2" und das „b" quadriert werden: $(2b)^2 = 2^2\cdot b^2 = 4b^2$

Aufgabe 1: Rechnen Sie aus!

a) $(a + 2)^2$	b) $(6 - b)^2$	c) $(x + 3)^2$
d) $(x - 5)^2$	e) $(3 + 2x)^2$	f) $(11 - x)^2$
g) $(4y - 3{,}5)^2$	h) $(2{,}4 - t)^2$	i) $(15 - \beta)^2$
j) $(x - 2) \cdot (x + 2)$	k) $(5 + y) \cdot (5 - y)$	l) $(2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$

Aufgabe 2: Ergänzen Sie!

a) $(\quad - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$	b) $(\quad + 1)^2 = b^2 + 2b + 1$
c) $(3 + \quad)^2 = 9 + 6t + t^2$	d) $(x - \quad)^2 = x^2 - 12x +$
e) $(\quad)^2 = x^2 + 16x + 64$	f) $(\quad)^2 = y^2 - \quad + 100$

Aufgabe 3: Ergänzen Sie!

a) $x^2 + 3x + \quad = (\quad)^2$	b) $x^2 - 14x + \quad = (\quad)^2$
c) $c^2 - 28c + \quad = (\quad)^2$	d) $z^2 + \quad = (\quad + 3)^2$
e) $x^2 + 5x + \quad = (\quad)^2$	f) $x^2 - 6{,}5x + \quad = (\quad)^2$
g) $x^2 + x + \quad = (\quad)^2$	h) $x^2 - 4x \quad = (\quad)^2$

Warum machen wir das eigentlich?

Problem Nr. 1:

Wenn wir für einen monopolistischen Anbieter ausrechnen wollen, welcher Preis bestimmt werden muss, damit der **Gewinn maximal** wird, benötigen wir dafür den **Scheitelpunkt der Gewinnparabel**, denn der x-Wert dieses Scheitelpunktes gibt an, bei welcher Absatzmenge das passiert!

Problem Nr. 2:

Wenn wir für einen monopolistischen Anbieter ausrechnen wollen, bei welchen Absatzmengen Gewinn erzielt wird (die sogenannte **Gewinnzone**), benötigen wir die Nullstellen der

Berechnung von Scheitelpunkten von Parabeln in der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$

Anhand der Scheitelpunktform $f(x) = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$ kann man den Scheitelpunkt $S\ (x_s\ /\ y_s)$ ablesen.

Umwandeln der allgemeinen Form in die Scheitelpunktform:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

1. Schritt: a ausklammern

$$\Leftrightarrow f(x) = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

2. Schritt: in der Klammer eine geeignete quadratische Ergänzung finden, so dass ein Teil einer binomischen Gleichung entsteht, und diese sofort wieder abziehen:

   HAQUAD mit der Zahl vor dem x, also $\frac{b}{a}$

$$f(x) = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a})$$

3. Schritt: zu binomischer Formel zusammenfassen

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

4. Schritt: a wieder mit der Klammer multiplizieren und Scheitelpunkt ablesen

$$f(x) = a\cdot\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{-b}{2a} / \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

   Alternativ könnte man auch x_s in die Funktion einsetzen:

$$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right)$$

Beispiel: $f(x) = -2x^2 + 12x - 4$

1. Schritt: a ausklammern

$$\Leftrightarrow f(x) = -2\cdot(x^2 - 6x + 2)$$

2. Schritt: in der Klammer eine geeignete quadratische Ergänzung finden, so dass ein Teil einer binomischen Gleichung entsteht, und diese sofort wieder abziehen:

   HAQUAD mit der Zahl vor dem x, also -6

$$f(x) = -2\cdot(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2)$$

3. Schritt: zu binomischer Formel zusammenfassen

$$f(x) = -2\left((x-3)^2 - 7\right)$$

4. Schritt: a wieder mit der Klammer multiplizieren und Scheitelpunkt ablesen

$$-2\cdot(x-3)^2 + 14$$

$$\Rightarrow S(3/14)$$

Kontrolle mit Formel:

a = -2; b = 12; c = -4

$$x_s = \frac{-b}{2\cdot a} = \frac{-12}{2\cdot(-2)} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$y_s = \frac{4\cdot a\cdot c - b}{4a} = \frac{4\cdot(-2)\cdot(-4) - 12^2}{4\cdot(-2)} = \frac{-112}{-8} = 14$$

Alternativ könnte man auch x_s in die Funktion einsetzen: $f(3) = -2\cdot 3^2 + 12\cdot 3 - 4 = 14$

a) $p(x) = -0{,}5x + 6$ und $G(x) = -0{,}5x^2 + 5{,}5x - 12$
b) $p(x) = -0{,}2x + 2$ und $G(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}8x - 1{,}6$
c) $p(x) = -0{,}5x + 3{,}5$ und $G(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$
d) $p(x) = -0{,}5x + 30$ und $G(x) = -0{,}5x^2 + 18x - 15$
e) $p(x) = -4\,000x + 40\,000$ und $G(x) = -4\,000x^2 + 36\,000x - 32\,000$
f) $p(x) = -0{,}00025x + 12{,}5$ und $G(x) = -0{,}00025x^2 + 9x - 12{,}5$

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie für die Funktionen der Aufgaben a) bis f) den Scheitelpunkt der Gewinnfunktion, indem Sie die Gewinnfunktion in die Scheitelpunktform umformen.

Aufgabe 2:
Der x-Wert des Scheitelpunktes aus Aufgabe 1 gibt die gewinnmaximale Absatzmenge an. Ermitteln Sie für die Funktionen der Aufgaben a) bis f) den Preis, den der monopolistische Anbieter festlegen muss, um maximalen Gewinn zu erzielen.

Kontrollergebnisse der Preise

Aufgabe	A	B	C	D	E	F
Preis für maximalen Gewinn in GE/ME	3,25	1,10	2,00	21,00	22 000,00	8,00

Erinnerung an Wurzeln

Aufgabe: Lösen Sie!

a) $\sqrt{5^2} =$ b) $\sqrt{3752^2} =$ c) $\sqrt{x^2} =$

d) $\sqrt{t^2} =$ e) $\sqrt{(x-6)^2} =$ f) $\sqrt{(x+1)^2} =$

Die pq-Formel

Wenn $x^2 + p \cdot x + q = 0$ dann gilt: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Aufgabe:
Bestimmen Sie für die Gewinnfunktionen aus den Aufgaben a) bis f) die Gewinnzone, indem

Rechnerische Bestimmung Scheitelpunkt

Gewinnfunktion Monopolist b) $G(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}8x - 1{,}6$ → Scheitelpunktform

$G(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}8x - 1{,}6$ $-0{,}2$ (Zahl vor x^2 ausklammern)

$\Leftrightarrow G(x) = -0{,}2 \cdot \left[\frac{-0{,}2}{-0{,}2}x^2 + \frac{1{,}8}{-0{,}2}x - \frac{1{,}6}{-0{,}2}\right] = -0{,}2 \cdot \left[x^2 - 9x + 8\right]$ | Zahl vor x Halbieren Quadrieren Addieren Subtrahieren

$\Leftrightarrow G(x) = -0{,}2 \cdot \left[x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 8\right]$

Tipp: $8 - \left(\frac{9}{2}\right)^2$ statt $-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 8$ rechnen

$= G(x) = -0{,}2 \cdot \left[\left(x - \left(\frac{9}{2}\right)\right)^2 - 12{,}25\right]$

$$= -0{,}2 \cdot (x - \underbrace{4{,}5}_{=\frac{9}{2}})^2 + \underbrace{2{,}45}_{= -0{,}2 \cdot (-12{,}25)}$$

Scheitelpunkt $S(4{,}5 / 2{,}45)$

Bestimmen des Preises: Einsetzen des x-Wertes vom Scheitelpunkt von $G(x)$ in Preisabsatzfunktion $p(x)$

aus Aufgabe b) $p(4{,}5) = -0{,}2 \cdot 4{,}5 + 2 = \underline{\underline{1{,}1}}$

Der Monopolist muss einen Preis von 1,1 GE/ME festlegen, um die gewinnmaximale Menge von $x = 4{,}5$ ME zu verkaufen. Dann erzielt er den maximalen Gewinn von 2,45 GE.

Die Kombination aus gewinnmaximaler Menge $x = 4{,}5$ und dem Preis 1,1 GE/ME nennt man Cournotschen Punkt $(4{,}5 \mid 1{,}1)$.
Der Cournotsche Punkt liegt auf der Preisabsatzfunktion.

WHB11d, 24.11.21

Rechnerische Bestimmung Scheitelpunkt

Gewinnfunktion Monopolist b) $G(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}8x - 1{,}6$ -> Scheitelpunktform

$G(x) = \underline{-0{,}2}x^2 + 1{,}8x - 1{,}6$ -0,2 (Zahl vor x^2 ausklammern)

$\Leftrightarrow G(x) = -0{,}2 \cdot \left[\frac{-0{,}2}{-0{,}2}x^2 + \frac{1{,}8}{-0{,}2}x - \frac{1{,}6}{-0{,}2}\right] = -0{,}2 \cdot \left[x^2 - 9x + 8\right]$ | Zahl vor x Halbieren Quadrieren Addieren Subtrahieren

$\Leftrightarrow G(x) = -0{,}2 \cdot \left[x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 8\right]$ Tipp: $8 - \left(\frac{9}{2}\right)^2$ statt $-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 8$ rechnen

$= G(x) = -0{,}2 \cdot \left[\left(x - \left(\frac{9}{2}\right)\right)^2 - 12{,}25\right]$

$= -0{,}2 \cdot (\underbrace{x - 4{,}5}_{= \frac{9}{2}})^2 + \underbrace{2{,}45}_{= -0{,}2 \cdot (-12{,}25)}$

Scheitelpunkt $S(4{,}5 / 2{,}45)$

WHB11d, 24.11.21

Rechnerische Bestimmung Scheitelpunkt

Gewinnfunktion Monopolist b) $G(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}8x - 1{,}6$ → Scheitelpunktform

$G(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}8x - 1{,}6$ $-0{,}2$ (Zahl vor x^2 ausklammern)

$\Leftrightarrow G(x) = -0{,}2 \cdot \left[\frac{-0{,}2}{-0{,}2}x^2 + \frac{1{,}8}{-0{,}2}x - \frac{1{,}6}{-0{,}2}\right] = -0{,}2 \cdot \left[x^2 - 9x + 8\right]$ | Zahl vor x Halbieren Quadrieren Addieren Subtrahieren

$\Leftrightarrow G(x) = -0{,}2 \cdot \left[x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 8\right]$

Tipp: $8 - \left(\frac{9}{2}\right)^2$ statt $-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 8$ rechnen

$= G(x) = -0{,}2 \cdot \left[\left(x - \left(\frac{9}{2}\right)\right)^2 - 12{,}25\right]$

$= -0{,}2 \cdot (\underbrace{x - 4{,}5}_{= \frac{9}{2}})^2 + \underbrace{2{,}45}_{= -0{,}2 \cdot (-12{,}25)}$

Scheitelpunkt $S(4{,}5 / 2{,}45)$