Gewinnanalyse für Funktionen dritten Grades

Ein Unternehmen arbeitet mit der Gewinnfunktion

$G(x) = (x-3)\cdot(-2x^2+16x+96)$. Berechnen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze! Skizze von $G(x)$

Ansatz $G(x) = 0$ [Immer dann, wenn es uns die Gewinnschwelle gibt!

$\Leftrightarrow (x-3)\cdot(-2x^2+16x+96) = 0$

$x-3=0 \quad \vee \quad -2x^2+16x+96 = 0 \quad |:(-2)$

$\underline{\underline{x=3}} \qquad \Leftrightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{4^2+48}$

$= 4 \pm 8$

$x = 4+8 = \underline{12}$

$x = 4-8 = \underline{-4}$

$\mathbb{L} = \{-4; 3; 12\}$

Gewinnschwelle: $x = 3$

Gewinngrenze: $x = 12$

3. Lösung: $x = -4$ ökonomisch nicht relevant

Zwischenübung:

$$(x-3)\cdot(-2x^2+16x+96) = \underbrace{-2x^3}_{=x\cdot(-2x^2)} \underbrace{+16x^2}_{=x\cdot 16x} \underbrace{+96x}_{=x\cdot 96} \underbrace{+6x^2}_{-3\cdot(-2x^2)} \underbrace{-48x}_{-3\cdot 16x} \underbrace{-288}_{-3\cdot 96}$$

$$= -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288$$

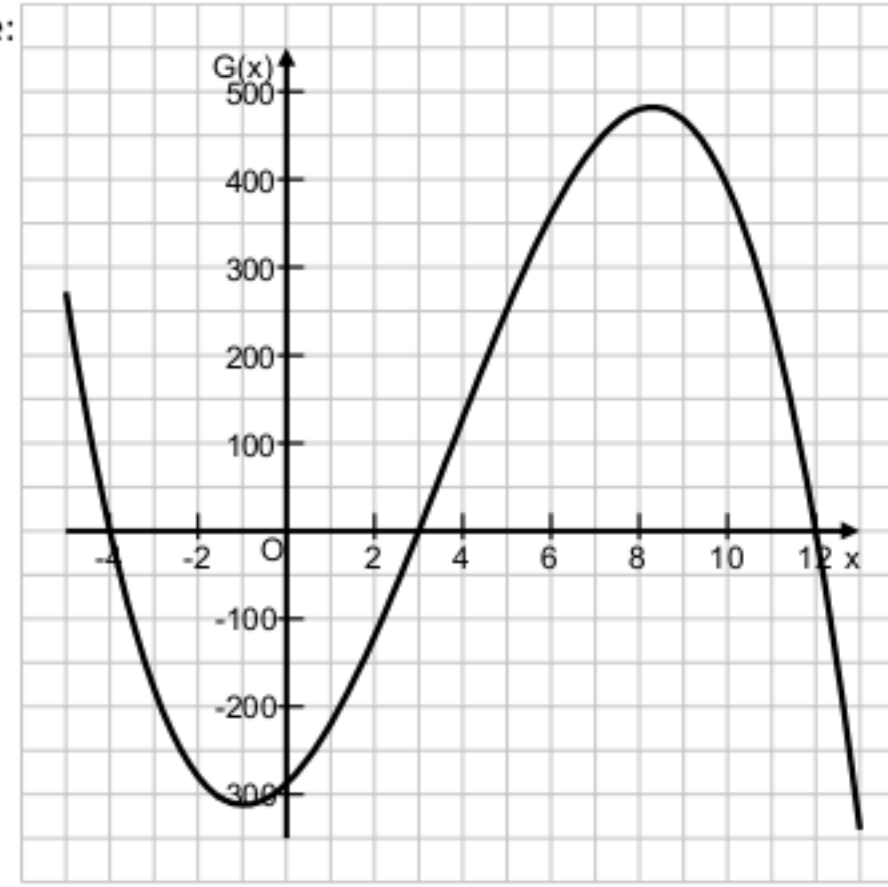
Aufgabe: Ein Unternehmen arbeitet mit der Gewinnfunktion

$G(x) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 228$. Berechnen Sie die Gewinnschwelle und Gewinngrenze. Skizze

Ansatz: $G(x) = 0$ mit x^3 ???????

3. Lösung: $x = -4$ ist nur mathematisch relevant, aber nicht ökonomisch!

Skizze:



Zwischenübung:

$G(x) = (x-3) \cdot (-2x^2 + 16x + 96) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288$

Situation 2:

Ein Unternehmen arbeitet mit der Gewinnfunktion $G(x) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288$. Die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze werden durch Lösen der Gleichung $G(x) = 0$ ermittelt, aber der Satz vom Nullprodukt kann nicht angewendet werden.

Lösung: Aus der Zwischenübung wissen wir, dass $G(x) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288 = 0$ dieselbe Lösung haben muss wie $G(x) = (x-3) \cdot (-2x^2 + 16x + 96) = 0$

Frage: Wie macht man aus $G(x) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288 = 0$ (nicht lösbar) die Gleichung $G(x) = (x-3) \cdot (-2x^2 + 16x + 96) = 0$ (lösbar)?

Lösen von $G(x) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288 = 0$

gelb = pink · ? | :pink

$\frac{\text{gelb}}{\text{pink}} = ?$

1. Schritt: Ausprobieren von möglichen Lösungen, zum Beispiel x=1, x=2, x=3, ...

x=1: $G(1) = -2 \cdot 1^3 + 22 \cdot 1^2 + 48 \cdot 1 - 288 = -220 \neq 0$
→ x=1 ist keine Lösung → weiter probieren

x=2: $G(2) = -2 \cdot 2^3 + 22 \cdot 2^2 + 48 \cdot 2 - 288 = -120 \neq 0$
→ x=2 ist keine Lösung → weiter probieren

x=3: $G(3) = -2 \cdot 3^3 + 22 \cdot 3^2 + 48 \cdot 3 - 288 = 0$ ✔
→ x=3 ist Lösung von G(x) = 0 → und jetzt??

Kann man G(x) zerlegen in einen linearen Faktor (Klammer mit x) und einen quadratischen Faktor (Klammer mit x²), so dass man den Satz vom Nullprodukt anwenden kann?

Idee: $-2x^3 + 22x^2 + 48x - 288 = (x-3) \cdot ($??????? $) = 0$ |:(x-3)

Wird beim Einsetzen von x = 3 Null	Wird beim Einsetzen von x = 3 Null

$(-2x^3 + 22x^2 + 48x - 288) : (x-3) = ($??????? $)$

$-2x^2 + 16x + 96$

⇨ Polynomdivision

Probe: $(x-3) \cdot (-2x^2 + 16x + 96) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288$

Statt $G(x) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288 = 0$ kann man

$G(x) = (x-3) \cdot (-2x^2 + 16x + 96) = 0$ lösen mit Satz vom Nullprodukt!

Polynomdivision

$$(-2x^3+22x^2+48x-288):(x-3) = -2x^2+16x+96$$

$$
\begin{array}{l}
-(-2x^3+6x^2) \\
\hline
\quad 16x^2+48x \\
\quad -(16x^2-48x) \\
\hline
\qquad 96x-288 \\
\qquad -(96x-288) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

NR 1

$$\frac{-2x^3}{x} = -2x^2$$

NR 2

$$\frac{16x^2}{x} = 16x$$

NR 3

$$\frac{96x}{x} = 96$$

Erinnerung:

$$
\begin{array}{l}
732 : 6 = 122 \\
\underline{-6} \\
\;13 \\
\underline{-12} \\
\;\;\;12 \\
\;\;\underline{-12} \\
\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$