

Lösen von Gleichungen dritten Grades

1) Ansatz: Gleichung auf die Form $f(x) = 0$ bzw. $G(x) = 0$

↳ Achtung: Sortierung der Potenzen absteigend $x^3, x^2, x, \text{ohne } x$

2) Lösung raten: Ausprobieren (-5 bis 5) oder Hinweise in der Aufgabe oder in Skizzen nutzen (Hinweis: raten mit Horner-Schema möglich!)

3) Zerlegung in Produkt aus linearem und quadratischem Faktor

$(x \dots) \cdot (x^2 \dots) = 0$ mit Horner-Schema oder Polynomdivision

4) Lösen der beiden Gleichungen $(x \dots) = 0$ und $(x^2 \dots) = 0$ Satz vom Nullprodukt

5) Antwort formulieren!

Bsp.: Übungsblatt 4a

$$\textcircled{-0,25}x^3 + \textcircled{4}x^2 + \textcircled{46,75}x - \textcircled{302,5} = 0$$

| x = | -0,25 | +4 | +46,75 | -302,5 |
|-------|-------|---|--|--|
| X = 1 | -0,25 | $1 \cdot (-0,25) = -0,25$ $-0,25 + 4 = 3,75$ | $1 \cdot 3,75 = 3,75$ $3,75 + 46,75 = 50,5$ | $1 \cdot 50,5 = 50,5$ $-302,5 + 50,5 = -252 \neq 0$ |
| X = 2 | -0,25 | $2 \cdot (-0,25) = -0,5$ $-0,5 + 4 = 3,5$ | $2 \cdot 3,5 = 7$ $7 + 46,75 = 53,75$ | $2 \cdot 53,75 = 107,5$ $107,5 - 302,5 = -195 \neq 0$ |
| X = 3 | - | - | - | - |
| X = 4 | - | - | - | - |
| X = 5 | -0,25 | $5 \cdot (-0,25) = -1,25$ $-1,25 + 4 = 2,75$ | $5 \cdot 2,75 = 13,75$ $13,75 + 46,75 = 60,5$ | $5 \cdot 60,5 = 302,5$ $302,5 - 302,5 = 0$ |

$$(\cancel{x-5}), (-0,25x^2 + 2,75x + 60,5) = 0$$

✓
Satz vom Nullprodukt

$$x - 5 = 0 \quad | +5 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 5}}$$

$$-0,25x^2 + 2,75x + 60,5 = 0 \quad | : (-0,25)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x - 242 = 0$$

$$p = -11 \quad q = -242$$

$$x = 5,5 \pm \sqrt{5,5^2 - (-242)}$$

$$x = 5,5 \pm 16,5$$

$$x = 5,5 + 16,5 = \underline{\underline{22}}$$

$$x = 5,5 - 16,5 = \underline{\underline{-11}}$$

$$\mathbb{L} = \{ 5, -11, 22 \}$$

Aufgabe 1:

Ein Unternehmen produziert ein bestimmtes Produkt zu Kosten, die durch die Funktion $K(x) = x^3 - 14x^2 + 120x + 400$ beschrieben werden können. Der Marktpreis für das Produkt liegt bei 180 GE je Mengeneinheit.

- Bestimmen Sie die Erlösfunktion $E(x)$ und die Gewinnfunktion $G(x)$.
Kontrollergebnis: $G(x) = -1x^3 + 14x^2 + 60x - 400$.
- Bestimmen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

Aufgabe 2:

Ein Unternehmen produziert ein bestimmtes Produkt zu Kosten, die durch die Funktion $K(x) = 1x^3 - 15x^2 + 78x + 36$ beschrieben werden können. Der Marktpreis für das Produkt liegt bei 30 GE je Mengeneinheit.

- Bestimmen Sie die Erlösfunktion $E(x)$ und die Gewinnfunktion $G(x)$.
Kontrollergebnis: $G(x) = -1x^3 + 15x^2 - 48x - 36$.
- Bestimmen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze. Hinweis: Eine Nullstelle liegt zwischen $x=3$ und $x=9$.

Aufgabe 3:

Ein Unternehmen plant seine Produktion anhand einer Kostenfunktion $K(x)$. Diese Funktion gibt für jede produzierte Menge x (angegeben in Mengeneinheiten ME) die Kosten, die bei dieser Produktion entstehen, an. Es gilt $K(x) = x^3 - 8x^2 + 64x + 160$. Die Kosten werden in Geldeinheiten (GE) angegeben. Das Unternehmen verkauft das Produkt für einen Preis von $p = 88$ GE/ME.

- Bestimmen Sie die Erlösfunktion $E(x)$ und die Gewinnfunktion $G(x)$.
Kontrollergebnis: $G(x) = -1x^3 + 8x^2 + 24x - 160$.
- Bestimmen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

Aufgabe 4:

- Lösen Sie $-0,25x^3 + 4x^2 + 46,75x - 302,5 = 0$
- Lösen Sie $(x + 1) \cdot (2x^2 + 16x + 32) = 0$
- Lösen Sie $2x^3 + 18x^2 + 48x + 32 = 0$. Hinweis: Eine Nullstelle liegt zwischen $x = -5$ und $x = 0$

Kontrollergebnisse:

Aufgabe 1: Gewinnschwelle: $x=4$; Gewinngrenze: $x=16,18$; ökon. nicht relevant: $x=-6,18$

Aufgabe 2: Gewinnschwelle: $x=6$; Gewinngrenze: $x=9,62$; ökon. nicht relevant: $x=-0,62$

Aufgabe 3: Gewinnschwelle: $x=4$; Gewinngrenze: $x=8,63$; ökon. nicht relevant: $x=-4,63$

Aufgabe 4a: $x=5$; $x=-11$; $x=22$

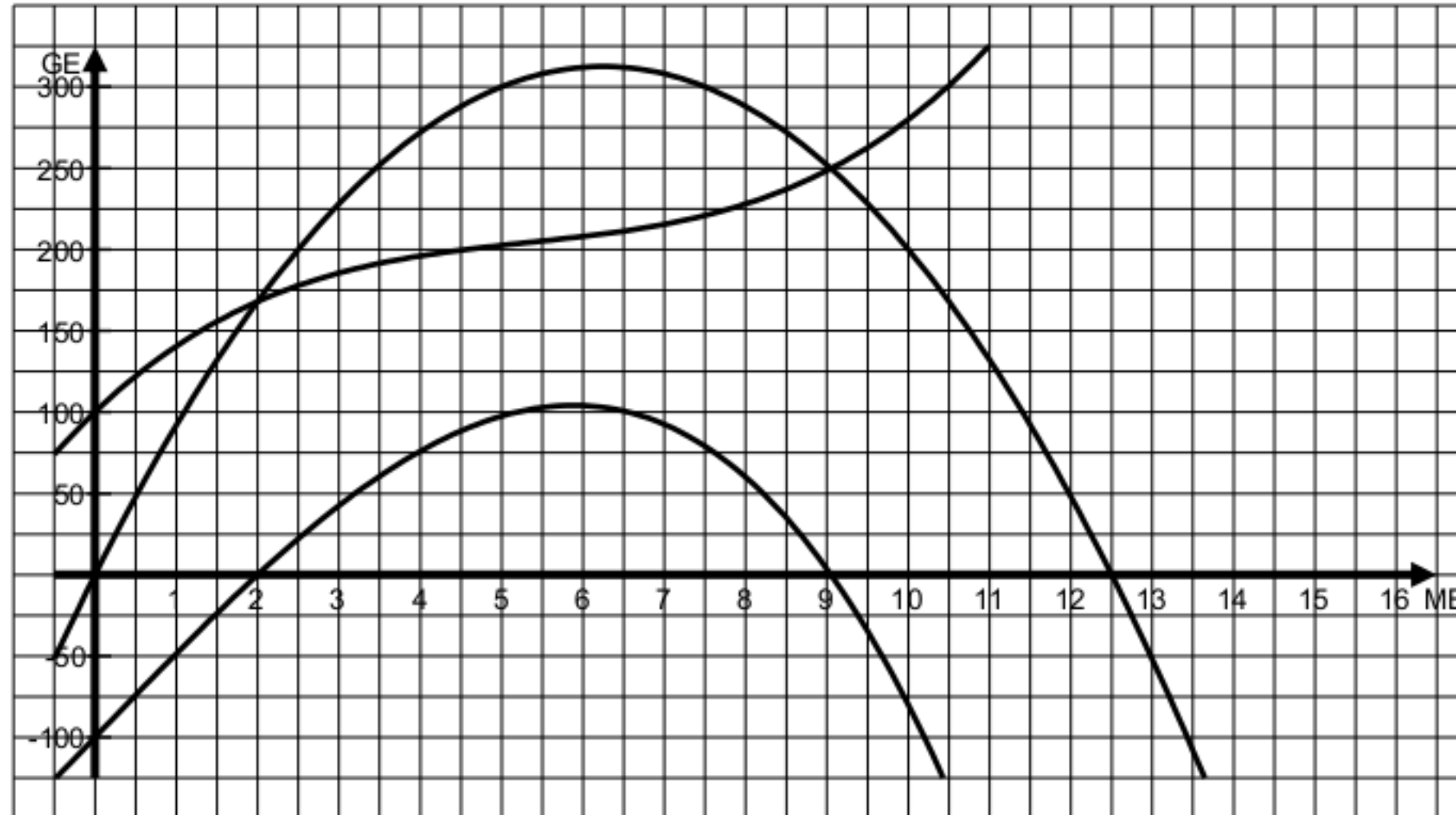
Aufgabe 4b: $x=-1$; $x=-4$; $x=-4$

Aufgabe 4c: $x=-1$; $x=-4$; $x=-5$

Aufgabe 5:

Die JoRo GmbH stellt qualitative einzigartige Mikrochips her; die gemäß der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -8x + 100$ abgesetzt werden können. Untersuchungen haben ergeben, dass die Kostenfunktion $K(x) = 0,5x^3 - 8x^2 + 48x + 100$ verwendet werden kann. Äußern Sie sich zur Gewinnsituation des Unternehmens und bestimmen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze. Bei welchen Preisen erzielt die JoRo GmbH Gewinne.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst die Erlösfunktion $E(x)$ und dann die Gewinnfunktion $G(x)$



Zwischenergebnisse zur Kontrolle:

- $G(x) = E(x) - (K(x)) \rightarrow$ Achtung! Beim Auflösen der Klammer Vorzeichen ändern!
- $G(x) = -0,5x^3 + 0x^2 + 52x - 100$
- Zerlegung: $(x-2) \cdot (-0,5x^2 - 1x + 50) = 0$
- Lösungen $x_1 = 2$; $x_2 = 9,05$ und $x_3 = -11,05$
- Gewinnschwelle: $x=2$ und Gewinngrenze $x = 9,05$

Weitere Übung:

Aufgabe 1

$$a) \quad E(x) = p \cdot x = 180x$$

$$G(x) = E(x) - (K(x)) = 180x - (1x^3 - 14x^2 + 120x + 400)$$
$$= 180x - 1x^3 + 14x^2 - 120x - 400$$
$$= -1x^3 + 14x^2 + 60x - 400$$

$$b) \quad G(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1x^3 + 14x^2 + 60x - 400 = 0$$

| | | | | |
|-----|----|-----|------|------|
| | -1 | +14 | +60 | -400 |
| x=4 | -1 | +10 | +100 | 0 |

$$(x-4) \cdot (-1x^2 + 10x + 100) = 0 \quad \text{SvN}$$

$$x-4=0 \quad \vee \quad -1x^2 + 100x + 100 = 0$$