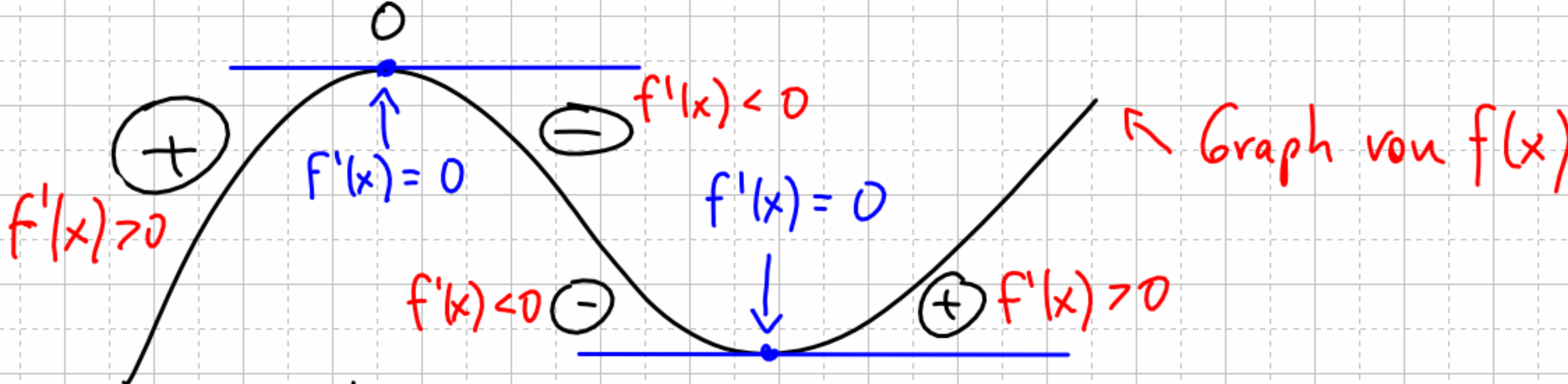
Extrempunkte



Bei einem Extrempunkt wechselt das Steigungsverhalten eines Funktionsgraphen von positiv zu negativ (Hochpunkt) bzw. von negativ zu positiv (Tiefpunkt). Im Extrempunkt ist daher die Steigung gleich 0 und mathematisch bedeutet das, dass die 1. Ableitung der Funktion den Wert 0 annimmt (notwendige Bedingung für einen Extrempunkt).

Beispiel: Berechnen Sie Extrempunkte von $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

1.) 1. Ableitung bilden: $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3}_{=1} x^2 \underbrace{- 2 \cdot 2}_{=-4} x^1 + 3$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$

2.) Notwendige Bedingung für Extrempunkt: $f'(x) = 0$

$x^2 \boxed{-4} x \boxed{+3} = 0$ $\quad p = -4 \quad q = 3$

$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3}$

$= 2 \pm 1$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 1 = 3 \\ x = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\}$ mögliche Extremstellen

3.) später Prüfung ob Hoch- oder Tiefpunkt

4) y-Werte: $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 5 = -5$ $\quad f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = -3,\overline{66}$

5) Extrempunkt 1 : $EP_1(3|-5)$

Extrempunkt 2 : $EP_2(1|-3.\overline{66})$

Die Frage, was davon Hochpunkt und Tiefpunkt sind, wird später beantwortet.

Aufgabe 1: Sie sehen den Graphen der Gewinnfunktion vom 26.01.22 $G(x) = -2x^3 + 22x^2 + 48x - 288$

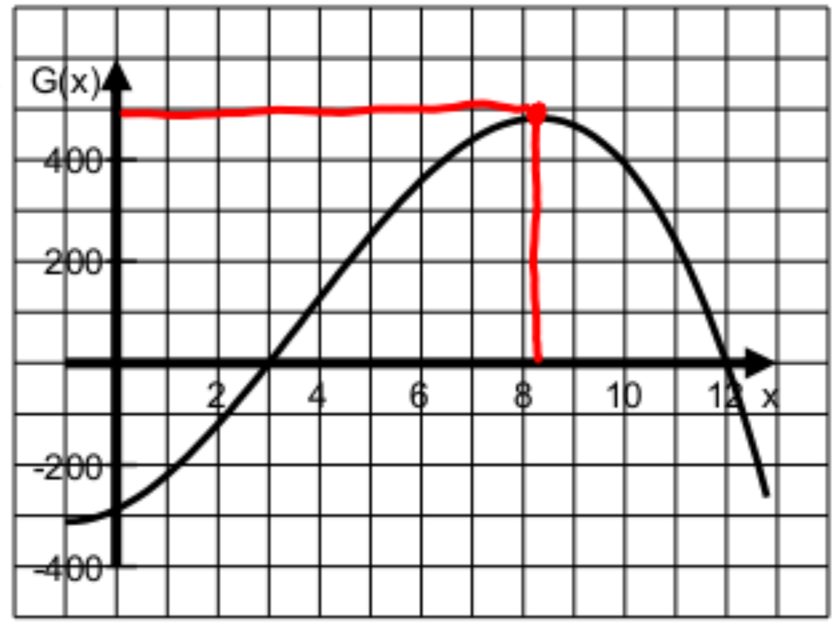
Berechnen Sie den **Hochpunkt** der Gewinnfunktion, indem Sie

→ die 1. Ableitung $G'(x)$ von $G(x)$ bilden ✓

→ die Gleichung $G'(x) = 0$ lösen (notwendige Bedingung für einen Hochpunkt) ✓

→ das (relevante) Ergebnis in $G(x)$ einsetzen ✓

→ den Hochpunkt (mit zwei Koordinaten) angeben und die beiden Koordinaten der gewinnmaximalen Menge und dem maximalen Gewinn zuordnen.



1. Ableitung von $G(x)$:

$$G'(x) = -2 \cdot 3x^2 + 22 \cdot 2x$$
$$= -6x^2 + 44x + 48$$

Notwendige Bedingung für Hochpunkt: $G'(x) = 0$

$$-6x^2 + 44x + 48 = 0 \quad |:(-6) \iff x^2 \underbrace{\boxed{-7{,}33}}_{p}x \underbrace{\boxed{-8}}_{q} = 0$$

$$x = 3{,}67 \pm \sqrt{(-3{,}67)^2 + 8}$$
$$= 3{,}67 \pm \sqrt{21{,}47}$$
$$= 3{,}67 \pm 4{,}6$$

$$x = 3{,}67 + 4{,}6 = 8{,}27 \checkmark$$
$$x = 3{,}67 - 4{,}6 = -0{,}93$$

ökonomisch nicht relevant, weil sie negativ

$$\rightarrow G(8{,}27) = -2 \cdot 8{,}27^3 + 22 \cdot 8{,}27^2 + 48 \cdot 8{,}27 - 288$$
$$= 482{,}39 \Rightarrow HP(8{,}27 \,/\, 482{,}39)$$

gewinnmax. Menge

max. Gewinn

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Hochpunkt von der Gewinnfunktion $G(x) = -0{,}25x^3 + 2x^2 + 17x - 40$ und geben Sie die gewinnmaximale Menge und den maximal möglichen Gewinn an.

Aufgabe 5: Berechnen Sie für ein Unternehmen mit der variablen Stückkostenfunktion

Aufgabe 2: Sie sehen den Graphen der Funktion $f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}8x^2 - 9{,}6x + 12{,}8$.

Berechnen Sie den **Hochpunkt** und den **Tiefpunkt** der Funktion, indem Sie

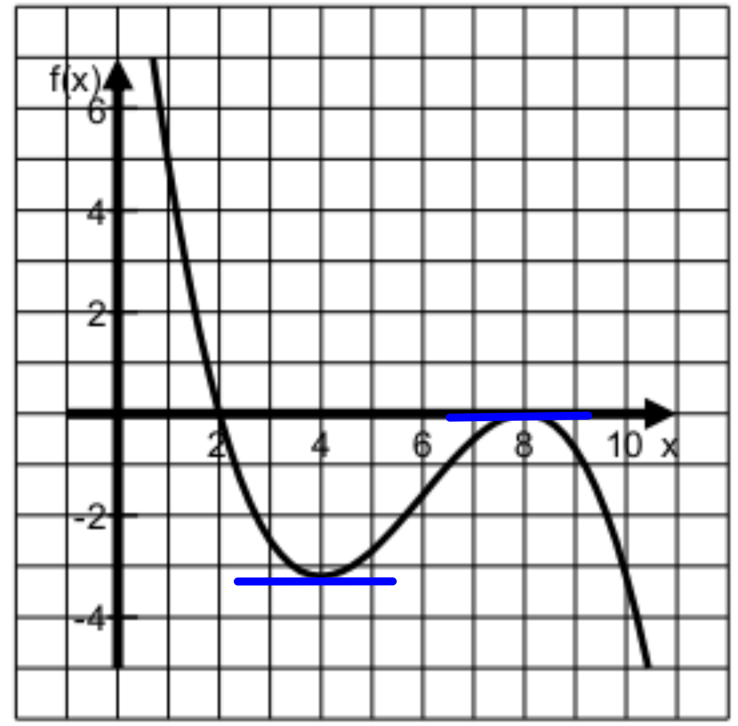
→ die 1. Ableitung f'(x) von f(x) bilden ✓

→ die Gleichung f'(x) = 0 lösen (notwendige Bedingung für einen Hochpunkt / einen Tiefpunkt) ✓

→ die Ergebnisse in f(x) einsetzen

→ den Hochpunkt (mit zwei Koordinaten) und den Tiefpunkt (mit zwei Koordinaten) angeben!

Frage: Woran könnten Sie ohne Skizze erkennen, bei welchem der beiden Punkte es sich um einen Hochpunkt oder um einen Tiefpunkt handelt?



$f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}8x^2 - 9{,}6x + 12{,}8$

Ableiten:

$f'(x) = -0{,}1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot 2 \cdot x - 9{,}6$

$= -0{,}3x^2 + 3{,}6x - 9{,}6$

Notwendige Bedingung für Extrempunkt: $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -0{,}3x^2 + 3{,}6x - 9{,}6 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \quad x = 4$

nächste Seite

Prüfung: Was ist HP, was ist TP → später

y-Wert: $f(8) = -0{,}1 \cdot 8^3 + 1{,}8 \cdot 8^2 - 9{,}6 \cdot 8 + 12{,}8 = 0$ HP(8|0)

$f(4) = -0{,}1 \cdot 4^3 + 1{,}8 \cdot 4^2 - 9{,}6 \cdot 4 + 12{,}8 = -3{,}2$ TP(4|-3,2)

$$-0{,}3x^2 + 3{,}6x^2 - 9{,}6 = 0 \quad \Big| :(-0{,}3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \underbrace{\boxed{-12}}_{p} x \underbrace{\boxed{+32}}_{q} = 0$$

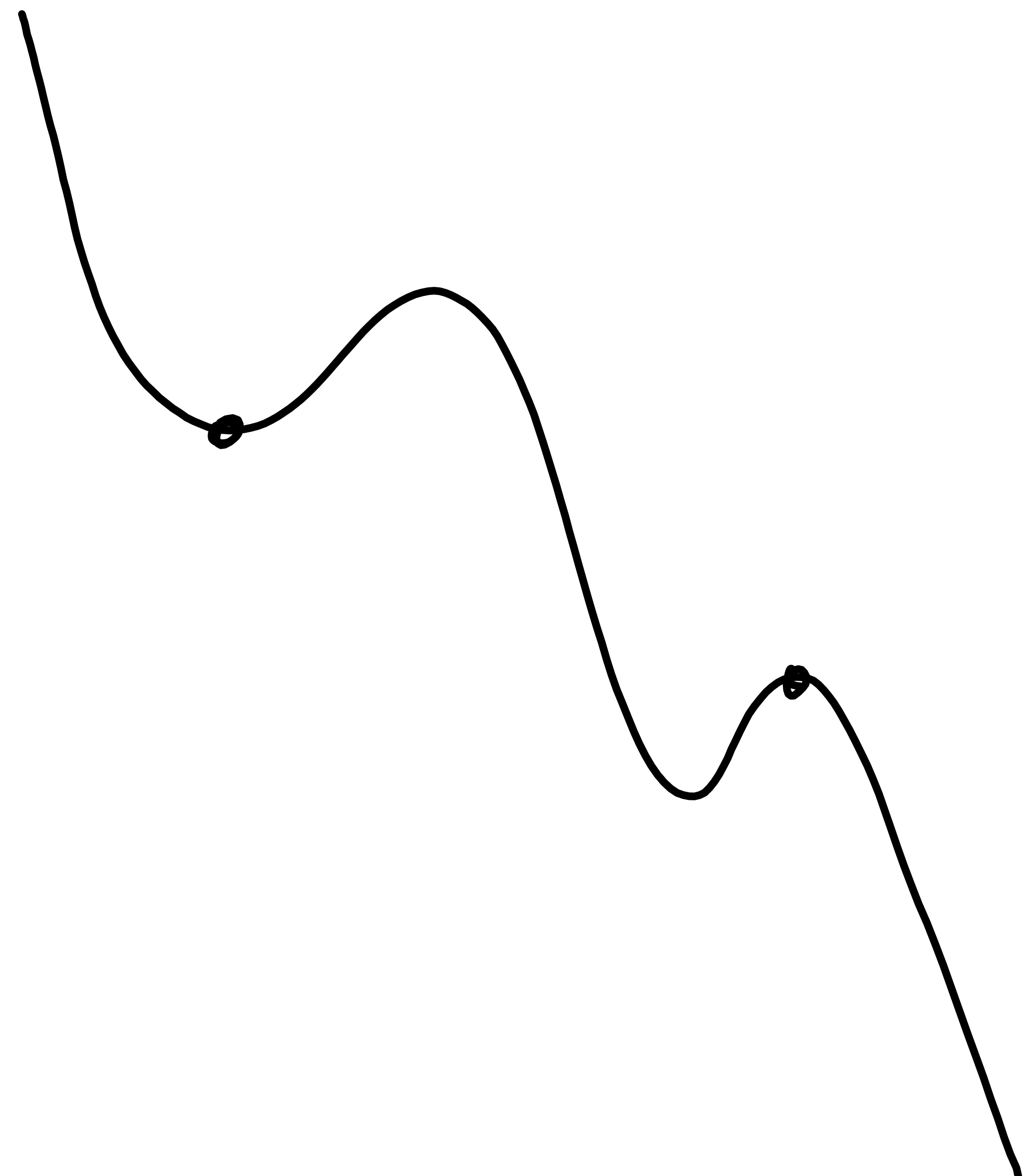
$$x = 6 \pm \sqrt{6^2 - 32}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{4}$$

$$x = 6 \pm 2$$

$$x = 6 + 2 = 8$$

$$x = 6 - 2 = 4$$



Aufgabe 5: Berechnen Sie für ein Unternehmen mit der variablen Stückkostenfunktion

$k_v(x) = 0{,}25x^2 - 2x + 7$ den Extrempunkt und entscheiden Sie, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

$$k_v(x) = 0{,}25x^2 - 2x + 7$$

Ableitung $k_v'(x) = 0{,}25 \cdot 2 \cdot x - 2 = 0{,}5x - 2$

Notwendige Bedingung für Extrempunkt $k_v'(x) = 0$

$$0{,}5x - 2 = 0 \quad |+2 \iff 0{,}5x = 2 \quad |:0{,}5 \iff \underline{\underline{x = 4}}$$

Prüfung ob HP oder TP → später

y-Wert: $k_v(4) = 0{,}25 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 7 = 3$

Extrempunkt $EP(4|3)$

↳ $k_v(x)$ ist nach oben geöffnete Parabel (erkennbar an $+0{,}25$) und darum ist der Extrempunkt $(4|3)$ ein Tiefpunkt.