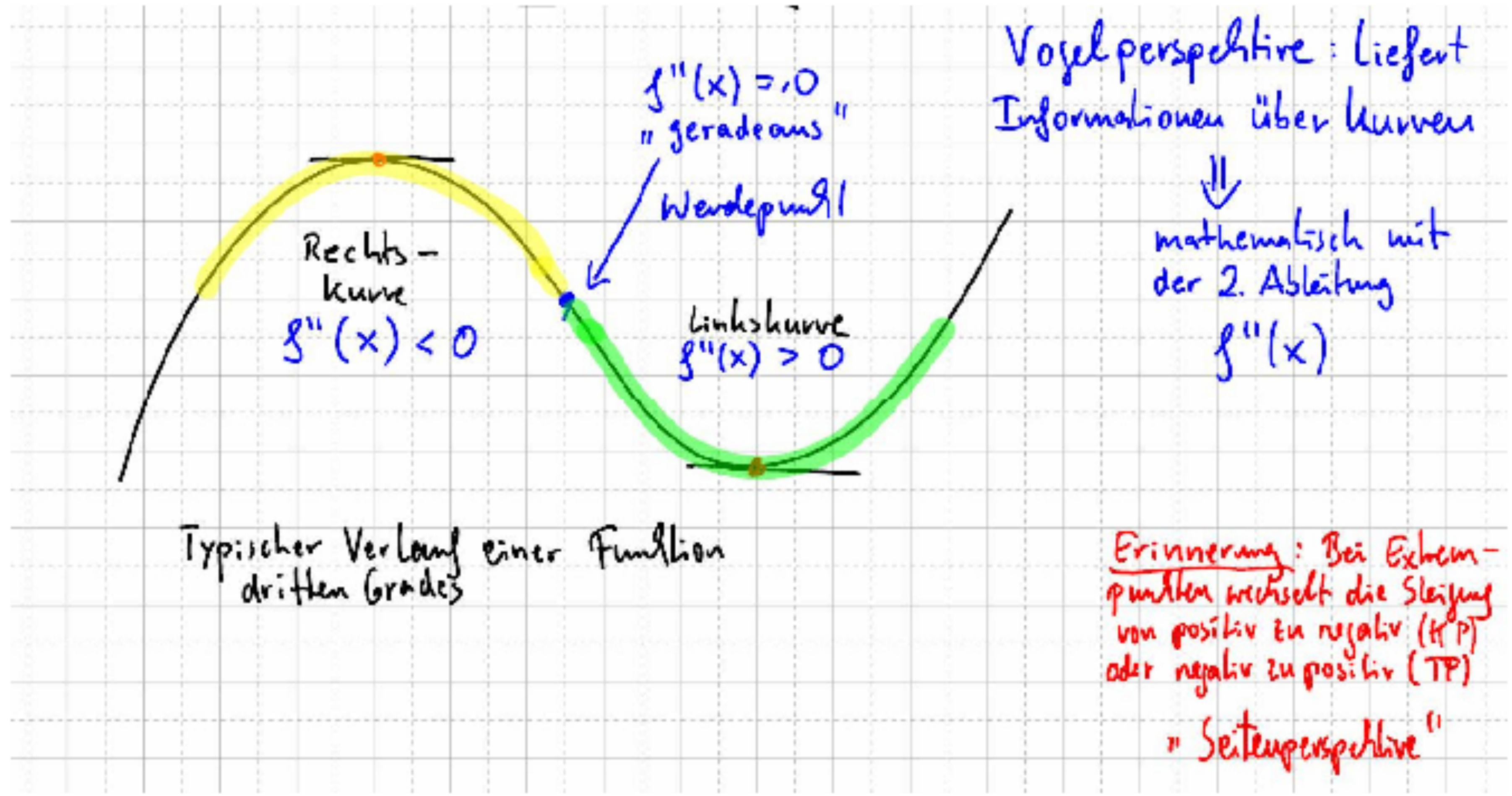
Hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt



Aus der Vogelperspektive kann man bei einem Graphen die Krümmung (rechts oder links oder geradeaus) erkennen. Die Krümmung wird mit Hilfe der 2. Ableitung einer Funktion berechnet. Die 2. Ableitung ist die Ableitung der 1. Ableitung und wird für eine Funktion f(x) mit f''(x) bezeichnet.

Benutzung der Krümmung für die Berechnung von Extrempunkten

Mit Hilfe der Krümmung einer Funktion kann man auch ohne einen Graphen erkennen, ob der Extrempunkt ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt ist. Wie man oben sehen kann, ist der Graph einer Funktion im **Hochpunkt rechtsgekrümmt** und im **Tiefpunkt linksgekrümmt**. Das kann man ausnutzen und die Lösungen von der notwendigen Bedingung in die 2. Ableitung einsetzen. Anhand des Ergebnisses entscheidet man, ob es sich um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.

Beispiel (Stunde vom 13.05.22)

Beispiel: Berechnen Sie Extrempunkte von $f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

1.) 1. Ableitung bilden: $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot 3}_{=1}x^2 \underbrace{-2\cdot 2}_{=4}x^1 + 3$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$

2.) Notwendige Bedingung für Extrempunkt: $f'(x) = 0$

$x^2 \boxed{-4}x \boxed{+3} = 0$ $\quad p = -4 \quad q = 3$

$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\qquad x = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3}$

$= 2 \pm 1$

$x = 2 + 1 = 3$
$x = 2 - 1 = 1$ } mögliche Extremstellen

3.) später Prüfung ob Hoch- oder Tiefpunkt

4) y-Werte: $f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - 5 = -5$ $\quad f(1) = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 5 = -3{,}\overline{66}$

Wenn wir die 1. Ableitung f'(x) mit den bekannten Regeln noch mal ableiten, erhalten wir die 2. Ableitung f''(x).

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$ => $f''(x) = 2\cdot x - 4$ (gibt die Krümmung eines Funktionsgraphen an)

Im **3. Schritt** können wir nun, die Stellen, an denen die Tangente waagerecht ist ($x=3$ und $x=1$) in die 2. Ableitung einsetzen und entscheiden, was für eine Art von Extrempunkt vorliegt. Man nennt das die hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt. Formal:

Hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt: $f'(x) = 0 \land f''(x) \neq 0$

$f''(3) = 2\cdot 3 - 4 = 2 > 0$ bedeutet Linkskrümmung, also ist bei $x = 3$ ein Tiefpunkt

$f''(1) = 2\cdot 1 - 4 = -2 < 0$ bedeutet Rechtskrümmung, also ist bei $x = 1$ ein Hochpunkt

Zusammenfassung für das Berechnen von Extrempunkten von einer Funktion f(x)

1. Die ersten beiden Ableitungen und f'(x) und f''(x) bestimmen

2. Notwendige Bedingung für Extrempunkt: $f'(x) = 0$ lösen

Übung: Berechnen von Extrempunkten

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 105x - 6$$

1) Ableitungen $\quad f'(x) = 3x^2 - 36x + 105 \qquad f''(x) = 6x - 36$

2) Notwendige Bedingung für Extrempunkte: $\quad f'(x) = 0$

$3x^2 - 36x + 105 = 0 \iff$ ... pq-Formel $\iff x = 5 \qquad x = 7$

3) Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $\quad f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

und

Einsetzen von $x=5$ und $x=7$ in $f''(x)$

$f''(5) = 6 \cdot 5 - 36 = -6 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x=5$

$f''(7) = 6 \cdot 7 - 36 = +6 > 0 \Rightarrow$ TP bei $x=7$

4) Einsetzen von $x=5$ und $x=7$ in $f(x)$

$f(5) = 5^3 - 18 \cdot 5^2 + 105 \cdot 5 - 6 = 194 \qquad$ HP $(5 \mid 194)$

$f(7) = 7^3 - 18 \cdot 7^2 + 105 \cdot 7 - 6 = 190 \qquad$ TP $(7 \mid 190)$

Bei den ökonomischen Anwendungen geht es darum, die Stelle oder die Stellen eines Graphen herauszufinden, wo keine Krümmung vorliegt. Denn dort könnte der Graph einen Wendepunkt haben. Man muss also die 2. Ableitung gleich 0 setzen, um diese Stellen herauszufinden. Diese Gleichung nennt man „Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt".

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt einer Funktion f(x): **f''(x) = 0**

Hinweis 1: Wenn man einen **Wendepunkt** z.B. von einer Kostenfunktion **K(x)** sucht, so lautet die notwendige Bedingung natürlich **K''(x) = 0**. Achten Sie auf den Buchstaben der Funktion.

Hinweis 2: Bei ökonomischen Anwendungen muss die Lösung dieser Gleichung positiv sein. Ist sie negativ, so müsste man sie als „ökonomisch nicht relevant" ignorieren. Eine negative Lösung kommt aber bei Kostenfunktionen nicht vor, sie müssen also die Rechnung überprüfen.

<u>Berechnung von Wendeunkten einer Funktion f(x)</u>

1. Schritt: Die ersten drei Ableitungen f'(x), f''(x) und f'''(x) bestimmen.

2. Schritt: Die notwendige Bedingung f''(x) = 0 durch Lösen der Gleichung überprüfen, die Ergebnisse nennt man „mögliche Wendestelle(n)".

3. Schritt: Die Ergebnisse aus dem 2. Schritt einsetzen in die 3. Ableitung, um zu überprüfen, ob ein Krümmungswechsel stattfindet. Dazu muss die 3. Ableitung ungleich Null sein. Welche Art von Wechsel vorliegt ist aber meistens nicht von Bedeutung und wird hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt einer Funktion f(x): **f''(x) = 0 und f'''(x) ≠ 0**

- **f''(x) = 0 und f'''(x) < 0 bedeutet Wechsel von links nach rechts**
- **f''(x) = 0 und f'''(x) > 0 bedeutet Wechsel von rechts nach links**

4. Schritt: y-Wert ermitteln: die Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$ (Ergebnisse aus dem 2. Schritt) werden in die Funktion f(x) eingesetzt.

5. Schritt: Angabe der Wendepunkte mit beiden Koordinaten und ggf. Antwortsatz.

Hinweis 3: Wenn man einen **Wendepunkt** von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion **K(x)** sucht, so liegt dort ein Wechsel von rechts nach links vor, die dritte Ableitung sollte also positiv sein.

Hinweis 4: Beim Wendepunkt einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion wechselt das Kostenänderungsverhalten von degressiv zu progressiv.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie für die folgenden ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen K(x) jeweils rechnerisch den Übergang vom degressiven zum progressiven Wachstum, indem Sie den Wendepunkt berechnen.

1) $K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 80$ WP (4/87,2)
2) $K(x) = 5x^3 - 60x^2 + 250x + 200$ WP (4/560)
3) $K(x) = 1x^3 - 12x^2 + 60x + 50$ WP (4/162)
4) $K(x) = x^3 - 10x^2 + 35x + 18$ WP (3,33/60,59)
5) $K(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}8x^2 + 5{,}4x + 5$ WP (3/10,4)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie von f(x) den Wendepunkt.

a) $f(x) = 1x^3 + 6x^2 - 36x + 5$ WP (-2/93)
b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 1$ WP (1/-51)
c) $f(x) = -4x^3 + 12x - 6$ WP (0/-6)

Hinweis: Wenn es keine ökonomische Anwendung ist, kann der x-Wert des Wendepunktes auch negativ sein,

Übung: Berechnung von Wendepunkten

Wendepunkt der Kostenfunktion $K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 80$

1) Ableitungen: $K'(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 5$ $\quad K''(x) = 0{,}6x - 2{,}4$ $\quad K'''(x) = 0{,}6$

2) Notwendige Bedingung für Wendepunkt: $K''(x) = 0$ Achtung: Bei WP 2. Ableitung gleich 0

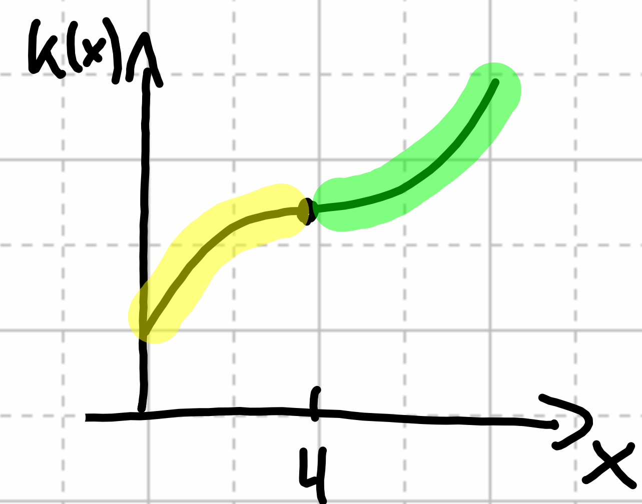
$\Leftrightarrow 0{,}6x - 2{,}4 = 0 \quad |+2{,}4 \Leftrightarrow 0{,}6x = 2{,}4 \quad |:0{,}6 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$

3) Hinreichende Bedingung: $K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$ ✓ $K'''(x) = 0{,}6 \neq 0$

4) y-Wert: Einsetzen von $x = 4$ in $K(x)$

$K(4) = 0{,}1 \cdot 4^3 - 1{,}2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 + 80 = 87{,}2$ $\quad WP(4 \mid 87{,}2)$

Skizze und Bedeutung



Bis zum Wendepunkt bei $x = 4$ wachsen die Kosten degressiv (Rechtskurve).

Ab dem Wendepunkt bei $x = 4$ wachsen die Kosten progressiv (Linkskurve) grenze)

- Wendepunkte (mathematisch und ökonomisch (WP der Kostenfunktion))

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die von folgenden Funktionen die 1. Ableitung und die 2. Ableitung.

a) $f(x) = 3x^6 – 5x^3 - 5x$
b) $f(x) = -27x^{10} + 33x^{18} -2x$
c) $f(x) = 2x^7 – 0{,}25x^8 + 6x^5 -3x^2$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mit von folgenden Funktionen die Extrem- und Wendepunkte.

a)	$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 3x – 1$	HP (-0,81/1,27)	TP (0,31/-1,52)	WP (-0,25/-0,13)
b)	$f(x) = x^3 + 6x^2 +8x – 1$	HP (-3,15/2,08)	TP (-0,85/-4,08)	WP (-2/-1)

Aufgabe 3

Ein Unternehmen plant mit den Gewinnfunktionen G(x). Bestimmen Sie die gewinnmaximale Menge und den maximalen Gewinn.

a)	$G(x) = -0{,}25x^3 + 12x – 12{,}5$	gewinnmaximale Menge:4,12 ME	maximaler Gewinn:20,76 GE
b)	$G(x) = -2x^3 + 25x^2 + 8x – 15$	gewinnmaximale Menge:8,49 ME	maximaler Gewinn:631 GE

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ die Tangentensteigungen und die Krümmungen an den Stellen $x = - 2$; $x = 0$ und $x = 2$

Aufgabe 5

Begründen Sie, warum die Funktion $f(x) = x^3 +3x^2 + 3x + 1$ keinen Extrempunkt besitzt.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie für die folgenden Kostenfunktionen den Wendepunkt sowie ~~das Betriebsminimum (x_{BM}) und die kurzfristige Preisuntergrenze~~.

TP der variablen Stückkostenfunktion $k_v(x)$

a)	$K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$	WP (2/46)	x_{BM}=3 ME	KPU = 6 GE/ME
b)	$K(x) = 0{,}5x^3 - 45x^2 + 1450x + 54000$	WP (30/16500)	x_{BM}=45 ME	KPU = 437,5GE/ME
c)	$K(x) = x^3 -12x^2 + 50x + 800$	WP (4/872)	x_{BM}=6 ME	KPU = 14 GE/ME

Aufgabe 7

Erläutern Sie die ökonomische Bedeutung des Wendepunktes der Kostenfunktion.

Aufgabe 8

Erläutern Sie die Begriffe Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze.