- Hochpunkt der Gewinnfunktion (gewinnmaximale Menge und maximaler Gewinn)
- Tiefpunkt der variablen Stückkostenfunktion (Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze)

- Wendepunkte (mathematisch und ökonomisch (WP der Kostenfunktion))

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die von folgenden Funktionen die 1. Ableitung und die 2. Ableitung.

a) $f(x) = 3x^6 – 5x^3 - 5x$
b) $f(x) = -27x^{10} + 33x^{18} -2x$
c) $f(x) = 2x^7 – 0{,}25x^8 + 6x^5 -3x^2$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mit von folgenden Funktionen die Extrem- und Wendepunkte.

a)	$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 3x – 1$	HP (-0,81/1,27)	TP (0,31/-1,52)	WP (-0,25/-0,13)
b)	$f(x) = x^3 + 6x^2 +8x – 1$	HP (-3,15/2,08)	TP (-0,85/-4,08)	WP (-2/-1)

Aufgabe 3

Ein Unternehmen plant mit den Gewinnfunktionen G(x). Bestimmen Sie die gewinnmaximale Menge und den maximalen Gewinn.

a)	$G(x) = -0{,}25x^3 + 12x – 12{,}5$	gewinnmaximale Menge:4,12 ME	maximaler Gewinn:20,76 GE
b)	$G(x) = -2x^3 + 25x^2 + 8x – 15$	gewinnmaximale Menge:8,49 ME	maximaler Gewinn:631 GE

~~**Aufgabe 4:**~~

~~Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ die Tangentensteigungen und die Krümmungen an den Stellen x = - 2; x = 0 und x = 2~~

~~**Aufgabe 5**~~

~~Begründen Sie, warum die Funktion $f(x) = x^3+3x^2 + 3x + 1$ keinen Extrempunkt besitzt.~~

Aufgabe 6

Bestimmen Sie für die folgenden Kostenfunktionen den Wendepunkt sowie das ~~Betriebsminimum (x_{BM})~~ und die ~~kurzfristige Preisuntergrenze~~.

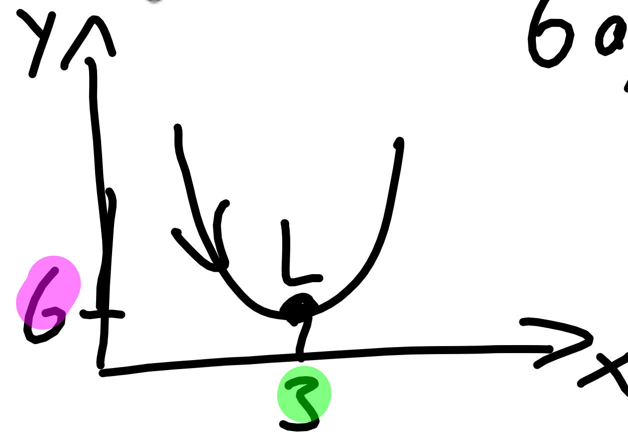
a)	$K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$	WP (2/46)	x_{BM}=3 ME	KPU = 6 GE/ME
b)	$K(x) = 0{,}5x^3 - 45x^2 + 1450x + 54000$	WP (30/16500)	x_{BM}=45 ME	KPU = 437,5GE/ME
c)	$K(x) = x^3 -12x^2 + 50x + 800$	WP (4/872)	x_{BM}=6 ME	KPU = 14 GE/ME

Aufgabe 7

Erläutern Sie die ökonomische Bedeutung des Wendepunktes der Kostenfunktion.

~~**Aufgabe 8**~~

~~Erläutern Sie die Begriffe Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze.~~



6a) variable Stückkostenfunktion

$k_v(x) = x^2 - 6x + 15$

gesucht ist der TP

Ableitungen: $k_v'(x) = 2x - 6$

$k_v''(x) = 2$

Notwendige Bed. für TP: $k_v'(x) = 0$

$2x - 6 = 0 \quad |+6 \quad |:2$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 3}$

Hinreichende Bed. für TP: $k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) > 0$

$k_v''(3) = 2 > 0$ TP bei $x = 3$

y-Wert: $k_v(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 15 = 6$

TP(3/6)

Mail: carsten.vooren@bkcr.info

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mit von folgenden Funktionen die Extrem- und Wendepunkte.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ HP (-0,81/1,27) TP (0,31/-1,52) WP (-0,25/-0,13)

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x - 1$ HP (-3,15/2,08) TP (-0,85/-4,08) WP (-2/-1)

Aufgabe 3

Ein Unternehmen plant mit den Gewinnfunktionen G(x). Bestimmen Sie die gewinnmaximale Menge und den maximalen Gewinn.

a) $G(x) = -0,25x^3 + 12x - 12,5$ gewinnmaximale Menge: 4,12 ME maximaler Gewinn: 20,76 GE

b) $G(x) = -2x^3 + 25x^2 + 8x - 15$ gewinnmaximale Menge: 8,49 ME maximaler Gewinn: 631 GE

2a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

Ableitungen: $f'(x) = 12x^2 + 6x - 3$

$f''(x) = 24x + 6$

$f'''(x) = 24$ → wird nur WP benötigt

Extrempunkte: notwendige Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$12x^2+6x-3=0 \quad |:12$$

$$\Leftrightarrow x^2+0{,}5x-0{,}25=0$$

$p=0{,}5 \qquad q=-0{,}25$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$-(-0{,}25)=+0{,}25$$

$$x=-0{,}25\pm\sqrt{0{,}25^2+0{,}25}$$

$$=-0{,}25\pm 0{,}56$$

$$x=-0{,}25+0{,}56=0{,}31$$

$$x=-0{,}25-0{,}56=-0{,}81$$

→ Einsetzen in $f''(x)$ für die Entscheidung HP, TP

→ Einsetzen in $f(x)$ für y-Wert

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0{,}31) = 24 \cdot 0{,}31 + 6 = 13{,}44 > 0$ TP bei $x = 0{,}31$

$f''(-0{,}81) = 24 \cdot (-0{,}81) + 6 = -13{,}44 < 0$ HP bei $x = -0{,}81$

y-Wert: $f(0{,}31) = -1{,}52$

$f(-0{,}81) = 4 \cdot (-0{,}81)^3 + 3 \cdot (-0{,}81)^2 - 3 \cdot (-0{,}81) - 1 = +1{,}27$

TP $(0{,}31 / -1{,}52)$

HP $(-0{,}81 / 1{,}27)$

Wendepunkt

Notwendige Bed. für WP: $f''(x) = 0$

$$24x + 6 = 0 \quad |-6 \quad |:24$$

$$\Leftrightarrow x = -0{,}25$$

Hinreichende Bedingung für WP: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

↳ ist erfüllt, da $f'''(x) = 24 \neq 0$ ✓

y-Wert: $f(-0{,}25) = 4 \cdot (-0{,}25)^3 + 3 \cdot (-0{,}25)^2 - 3 \cdot (-0{,}25) - 1 = -0{,}13$

$$WP\,(-0{,}25 \,/\, -0{,}13)$$

Aufgabe 3

HP von G(x)

x-Wert heißt gewinnmaximale Menge

y-Wert heißt maximaler Gewinn

3b) $G(x) = -2x^3 + 25x^2 + 8x - 15$

↳ gesucht ist HP

Ableitungen: $G'(x) = -6x^2 + 50x + 8$

$G''(x) = -12x + 50$

Notwendige Bedingung für HP: $G'(x) = 0$

$-6x^2 + 50x + 8 = 0 \quad | :(-6)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8{,}33x - 1{,}33 = 0 \qquad p = -8{,}33 \qquad q = -1{,}33$

$$X = 4{,}17 \pm \sqrt{4{,}17^2 + 1{,}33}$$
$$= 4{,}17 \pm 4{,}32$$

$$X = 4{,}17 + 4{,}32 = 8{,}49$$
$$X = 4{,}17 - 4{,}32 = -0{,}15$$ ↳ ökon. nicht relevant

Hinreichende Bed. für HP: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$

$$G''(8{,}49) = -12 \cdot 8{,}49 + 50 = -51{,}88 < 0$$

HP bei $8{,}49 = x$

Y-Wert: $G(8{,}49) = -2 \cdot 8{,}49^3 + 25 \cdot 8{,}49^2 + 8 \cdot 8{,}49 - 15 = 631$

HP $(8{,}49 \mid 631)$

Gewinnmaximale Menge ↲ ↳ maximaler Gewinn