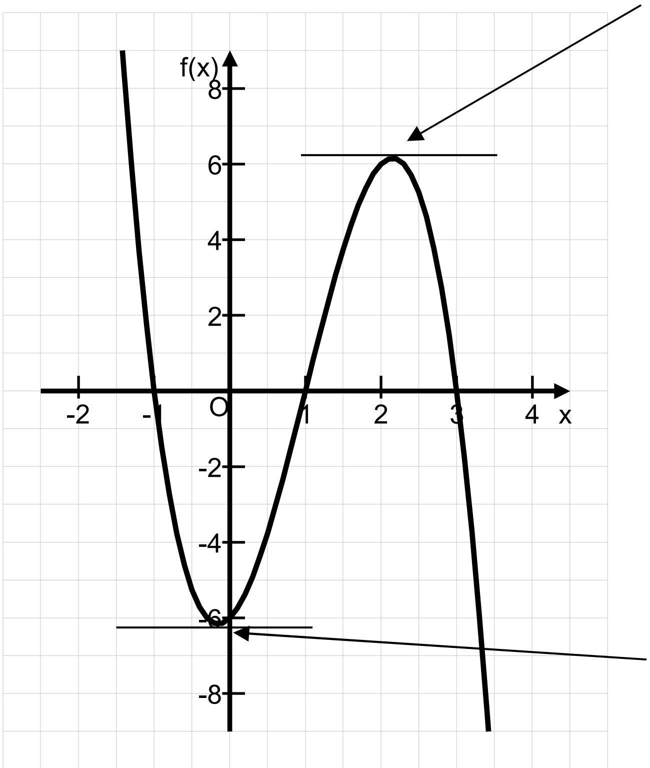
	W-HB12 - Mathematik **Extrempunkte** **(auch als Prüfungsvorbereitung geeignet)**	Datum: Februar 2019

Das besondere an Extrempunkten (man unterscheidet Hochpunkte und Tiefpunkte) ist die Tatsache, dass in diesen Punkten das Steigungsverhalten einer Funktion wechselt und zwar von positiv („bergauf“) zu negativ („bergab“) oder von negativ („bergab“) zu positiv („bergauf“).



Steigung wechselt von positiv zu negativ

(Hochpunkt)

Tangente ist waagerecht, d.h. **f‘(x) = 0** (notw. Bed. für Hochpunkt)

Der Graph ist rechtsgekrümmt, d.h. **f‘‘(x) < 0** (hinr. Bed. für Hochpunkt

Steigung wechselt von negativ zu positiv

(Tiefpunkt)

Tangente ist waagerecht, d.h. **f‘(x) = 0** (notw. Bed. für Tiefpunkt)

Der Graph ist linksgekrümmt, d.h. **f‘‘(x) > 0** (hinr. Bed. für Tiefpunkt

	HP	TP
Wert der ersten Ableitung	f‘(x) = 0	f‘(x) = 0
Wert der zweiten Ableitung	f‘(x) = 0 und **f‘‘(x) < 0**	f‘(x) = 0 und **f‘‘(x) > 0**

Zusammenfassung

- Bei einem Extrempunkt (Hochpunkt oder Tiefpunkt) ist die Tangente waagerecht und das bedeutet f‘(x) =0.
- Bei einem Hochpunkt ist der Wert der zweiten Ableitung negativ, also gilt f‘‘(x) < 0 (Rechtskrümmung im HP) und bei einem Tiefpunkt ist der Wert der zweiten Ableitung positiv, also gilt f‘‘(x) >0 (Linkskrümmung im TP).

Praktische Anwendung:

Bei den ökonomischen Anwendungen geht es meistens darum, die Stelle oder die Stellen eines Graphen herauszufinden, wo die Tangente keine Steigung (waagerecht) hat. Denn dort könnte der Graph ein Maximum (Hochpunkt) oder ein Minimum (Tiefpunkt) haben. Man muss also die 1. Ableitung gleich 0 setzen, um diese Stellen herauszufinden. Diese Gleichung nennt man „Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt".

> **Notwendige Bedingung** für einen Extrempunkt einer Funktion f(x): **$f'(x) = 0$**

Hinweis 1: Wenn man einen Extrempunkt z.B. von einer Gewinnfunktion G(x) sucht, so lautet die notwendige Bedingung natürlich $G'(x) = 0$. Achten Sie auf den Buchstaben der Funktion.

Hinweis 2: Bei ökonomischen Anwendungen erhält man manchmal zwei Lösungen bei der notwendigen Bedingung. Wenn eine davon eine negative Zahl ist, so kann man sie als „ökonomisch nicht relevant" ignorieren.

Hinweis 3: Es gibt Funktionen, die haben keine Stelle am Graphen mit einer waagerechten Tangente. In diesem Fall ist die notwendige Bedingung (1. Ableitung gleich 0) nicht erfüllt und man kann argumentieren, dass es keinen Extrempunkt gibt.

Berechnung von Extrempunkten einer Funktion f(x)

1. Schritt: Die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ bestimmen.

2. Schritt: Die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ durch Lösen der Gleichung überprüfen, die

Ergebnisse nennt man „mögliche Extremstellen".

3. Schritt: Die Ergebnisse aus dem 2. Schritt einsetzen in die 2. Ableitung, um zu überprüfen, welche Art von Krümmung vorliegt. Daran kann man erkennen, welche Art von Extrempunkt vorliegt, ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt.

> **Hinreichende Bedingung** für einen Extrempunkt einer Funktion f(x): **$f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$**
>
> - **$f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ bedeutet Rechtskrümmung => Hochpunkt**
> - **$f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ bedeutet Linkskrümmung => Tiefpunkt**

4. Schritt: y-Wert ermitteln: die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ (Ergebnisse aus dem 2. Schritt) werden in die Funktion f(x) eingesetzt.

5. Schritt: Angabe der Extrempunkte mit beiden Koordinaten und ggf. Antwortsatz.

Übungen

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Funktionen auf Extrempunkte.

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 10$ ($EP_1(4/-2)$ und $EP_2(2/0)$)
b) $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 18x + 8$ ($EP_1(-1/0)$ und $EP_2(-3/8)$)
c) $f(x) = 1x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ ($EP_1(3{,}55/-0{,}63)$ und $EP_2(1{,}78/2{,}11)$)
d) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ($EP_1(2/-3)$)

Aufgabe 2:

Ein Unternehmen produziert ein bestimmtes Produkt und plant mit der Gewinnfunktion

$G(x) = -1x^3 + 14x^2 + 60x - 400$.

Die Variable x steht dabei für die Stückzahl und G(x) wird in GE (Geldeinheiten) angegeben. Bestimmen Sie den unter diesen Umständen maximal möglichen Gewinn und die Stückzahl, die dafür nötig ist.

Lösung: Extrempunkt von G(x) (11,13/623,33), das heißt der maximal mögliche Gewinn liegt bei 623,33 GE bei einer Produktionsmenge von x=11,13 Stück

Aufgabe 3:

Ein Anbieter verwendet für seine Planung die Gewinnfunktion $G(x) = -1x^3 - 63x^2 + 705x - 1150$. Bestimmen Sie die Gewinnzone und die Menge, bei der der Gewinn maximal wird und geben Sie diesen maximalen Gewinn an.

Lösung: Gewinnmaximale Menge: 5 ME und max. Gewinn: 675 GE.

Aufgabe 4:

Ein Unternehmen plant mit der Gewinnfunktion $G(x) = -0{,}5x^3 + 5x^2 - 3x - 36$. Bestimmen Sie den Hochpunkt der Gewinnfunktion.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie für die folgenden ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen K(x) jeweils rechnerisch das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze (dazu müssen Sie den Tiefpunkt der variablen Stückkostenfunktion berechnen).

1) $K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 80$ Lösungen: BM = 6 und KPU = 1,4

2) $K(x) = 5x^3 - 60x^2 + 250x + 200$ Lösungen: BM = 6 und KPU = 70

3) $K(x) = 1x^3 - 12x^2 + 60x + 50$ Lösungen: BM = 6 und KPU = 24