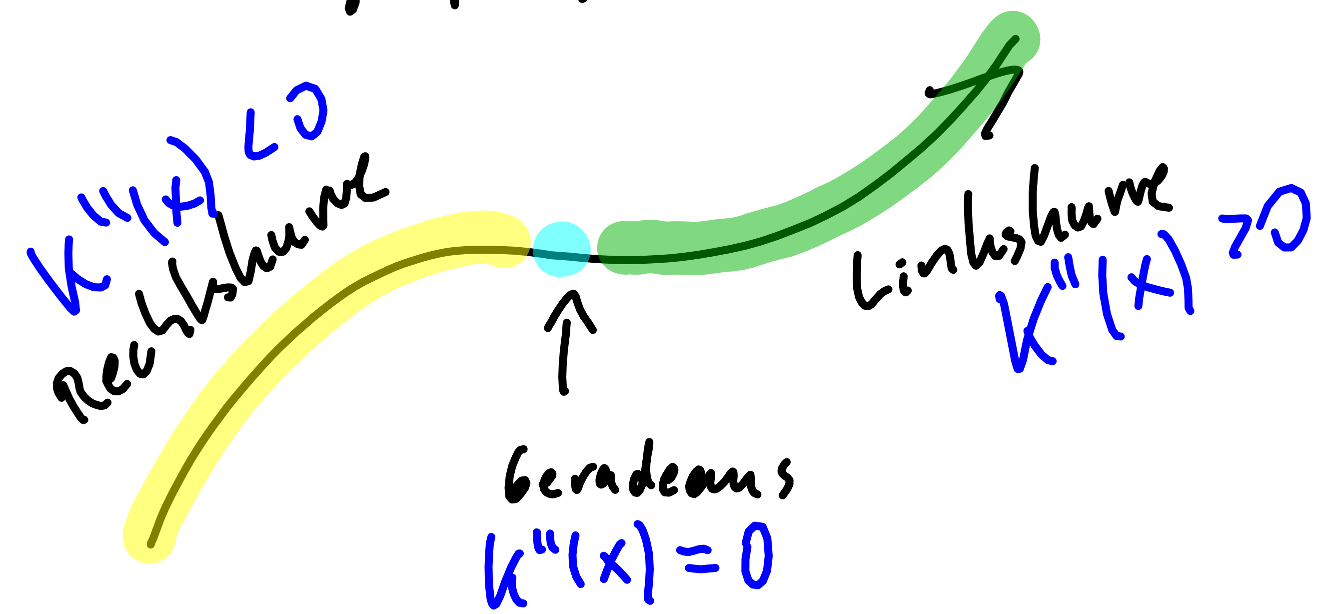
WHB 12d, 19.12.18

Vogelperspektive



Alle Kostenfunktionen dritten Grades, die wir im Unterricht behandeln, folgen dem Ertragsgesetz, daher der Name ertragsgesetzlich.[1] Ihr Verlauf ist immer gleich:

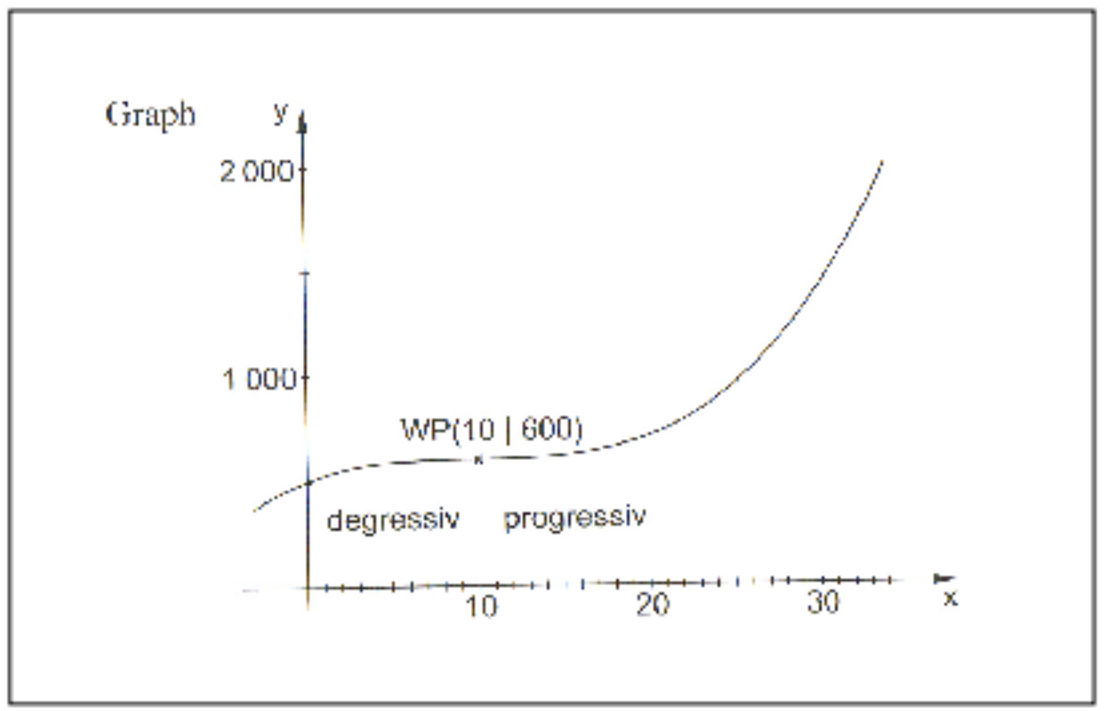
- Zu Beginn steigt die Kostenfunktion langsam an, der Graph folgt einer Rechtskurve.
- Der Wendepunkt markiert den Übergang zum schnell ansteigenden Teil. Im Wendepunkt hat der Graph keine Krümmung.
- Nach dem Wendepunkt steigt die Kostenfunktion schnell an, der Graph folgt einer Linkskurve

<u>Degressive Kostenentwicklung:</u>

die Zunahme der Kosten bei Ausweitung der Produktionsmenge wird kleiner, d.h. die Steigung der Kostenfunktion nimmt ab. Der Graph ist rechtsgekrümmt, also gilt: $K''(x) < 0$.

<u>Progressive Kostenentwicklung:</u>

die Zunahme der Kosten bei Ausweitung der Produktionsmenge wird größer, d.h. die Steigung der Kostenfunktion nimmt zu. Der Graph ist linksgekrümmt, also gilt: $K''(x) > 0$.



Beispielhafter Verlauf von K(x)

<u>Wendepunkt</u>

Der Wendepunkt markiert den Übergang vom degressiven Kostenwachstum zu progressivem Kostenwachstum, es liegt keine Krümmung vor, d.h. es gilt: $K''(x) = 0$

[1] Das Ertragsgesetz basiert auf landwirtschaftlichen Erfahrungen, wobei die Menge des Produktionsfaktors Boden (also die landwirtschaftlich genutzte Fläche) gegeben ist. Der ertragsgesetzliche Verlauf der Produktionsfunktion unterstellt, dass der Ertrag mit Intensivierung der landwirtschaftlichen Nutzung (partielle Faktorvariation) zunächst überproportional, danach aber unterproportional steigt. Schließlich bei Übernutzung wird der Ertrag wieder sinken.

Die variable Stückkostenfunktion und ihr Tiefpunkt

Wir hatten bereits graphisch den Tiefpunkt (das Minimum) der variablen Stückkosten bestimmt, dabei war der x-Wert das sogenannte Betriebsminimum und der y-Wert stellte die kurzfristige Preisuntergrenze dar. Mit den Ableitungen haben wir nun die Möglichkeit, diesen Punkt auch exakt zu berechnen.

1. Schritt: Die variable Stückkostenfunktion $k_V(x)$ aus der Kostenfunktion bilden und dann die ersten beiden Ableitungen von $k_V(x)$ bestimmen.

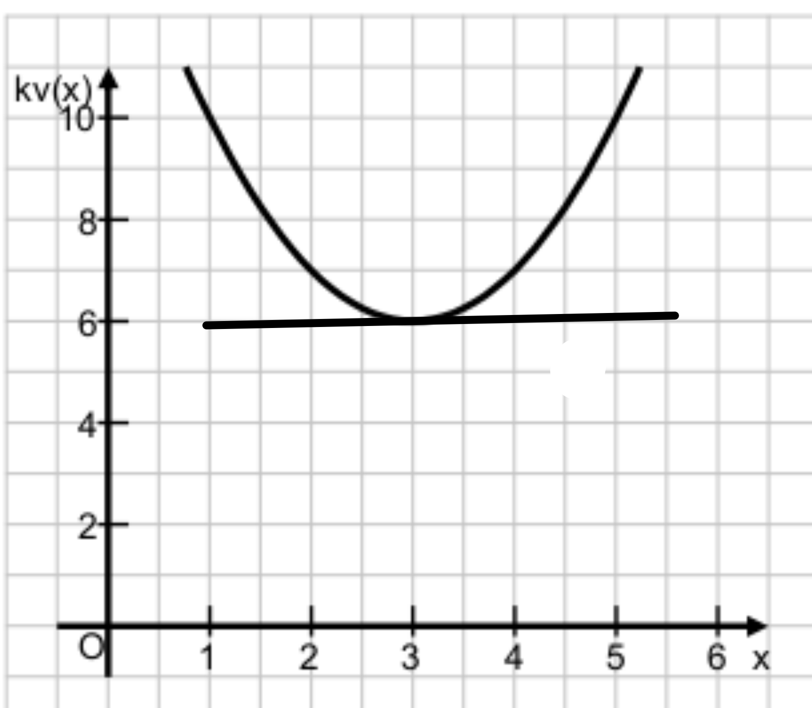
2. Schritt: Notwendige Bedingung für TP: $\mathbf{k_V'(x) = 0}$ → Gleichung lösen, Lösung entspricht **Betriebsminimum**

3. Schritt: Hinreichende Bedingung für TP: $k_V'(x) = 0$ und $k_V''(x) > 0$

   Also die Lösung aus Schritt 2 in die 2. Ableitung $k_V''(x)$ einsetzen und prüfen, ob der Wert positiv ist.

4. y-Wert des TP: Einsetzen des Betriebsminimum in variable Stückkostenfunktion. Das Ergebnis ist die **kurzfristige Preisuntergrenze**.

Beispiel:



Var. Stückkostenfunktion: $\mathbf{k_V(x) = x^2 - 6x + 15}$

Ableitungen: $k_V'(x) = 2x - 6$ und $k_V''(x) = 2$

Notw. Bed. für TP: $\mathbf{k_V'(x)=0}$ ⇔ $2x - 6 = 0$ ⇔ $x = 3$

Hinr. Bed. für TP: $\mathbf{k_V'(x) = 0}$ **und** $\mathbf{k_V''(x) > 0}$

$k_V''(3)=2 >0$ => TP bei $x = 3$

y-Wert: $k_V(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 15 = 6$

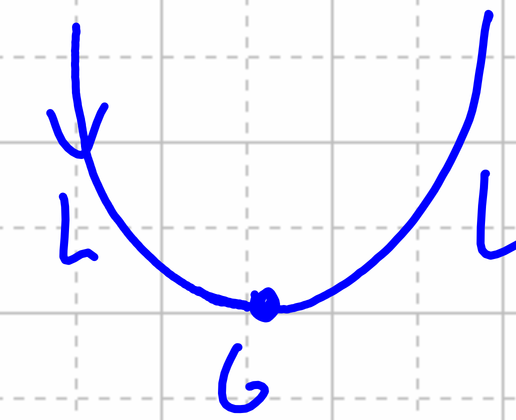
TP (3/6)

Betriebsminimum: x = 3

Kurzfristige Preisuntergrenze: 6 GE / ME

Übungen Wendepunkt und Tiefpunkt (von Klausurübungen)

Aufgabe 1 Kostenfunktion 2



$K(x) = 5x^3 - 60x^2 + 250x + 200$

a) Wendepunkt von $K(x)$: man benötigt drei Ableitungen

$K'(x) = 15x^2 - 120x + 250$ $\quad K''(x) = 30x - 120$ $\quad K'''(x) = 30 + 0 \cdot x$

Notwendige Bedingung für einen WP : $K''(x) = 0$ bedeutet, dass der Graph keine Krümmung hat.

$\Leftrightarrow 30x - 120 = 0 \quad | :30 \quad \Leftrightarrow x - 4 = 0 \quad | +4$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$ ← Bei $x = 4$ ist die Krümmung von $K(x)$ gleich 0.

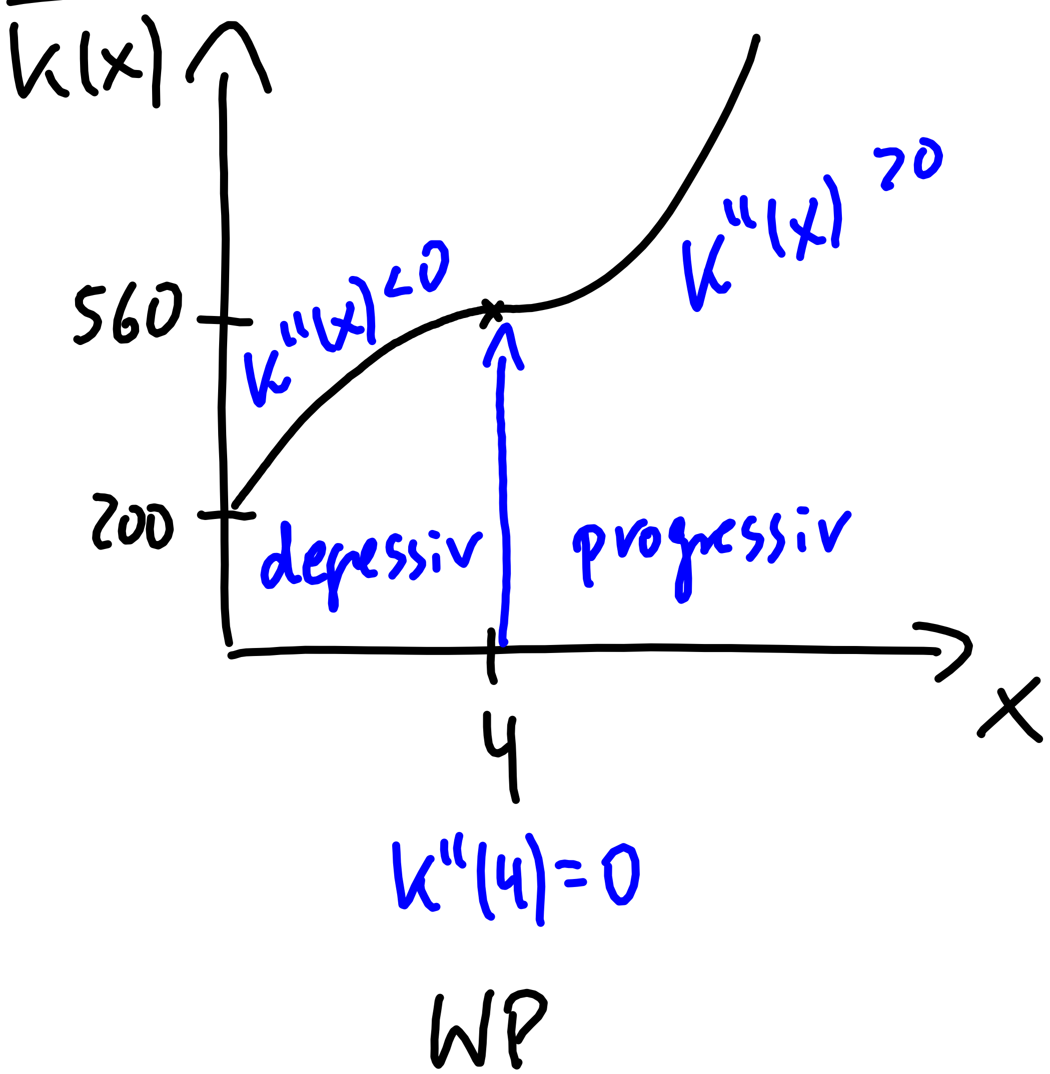
Hinreichende Bedingung für WP: $K''(x) = 0$ und $K'''(x) \neq 0$

Einsetzen von $x = 4$ in $K'''(x)$ $\quad K'''(4) = 30 \neq 0 \Rightarrow$ WP bei $x = 4$

y-Wert: Einsetzen von $x = 4$ in $K(x)$: $K(4) = 5 \cdot 4^3 - 60 \cdot 4^2 + 250 \cdot 4 + 200 = 560$

WP$(4 | 560)$

Ökonomische Bedeutung



Bis zu einer Produktionsmenge von $x = 4$ ME steigen die Kosten degressiv (unterproportional) an, bei einer Produktionsmenge von mehr als 4 ME steigen die Kosten progressiv (überproportional).

Fortsetzung $K(x) = 5x^3 - 60x^2 + 250x + 200$

d) Stückkostenfunktion $= \frac{\text{Gesamtkostenfunktion}}{\text{Menge}}$

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{5x^3 - 60x^2 + 250x + 200}{x} = 5x^2 - 60x + 250 + \frac{200}{x}$$

e) variable Kostenfunktion $K_v(x) = K(x) - K_{fix} = 5x^3 - 60x^2 + 250x$

f) variable Stückkostenfunktion: $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{5x^3 - 60x^2 + 250x}{x} = 5x^2 - 60x + 250$

g) gesucht ist der TP von $k_v(x)$ (variable Stückkostenfunktion)

Ableitungen: $k_v'(x) = 10x - 60$ $\quad k_v''(x) = 10$

Notw. Bed. für TP: $k_v'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - 60 = 0 \mid +60 \Leftrightarrow 10x = 60 \mid :10 \Leftrightarrow \underline{x = 6}$

Hinr. Bed. für TP: $k_v'(x) = 0$ und $k_v''(x) > 0$ $\quad k_v''(6) = 10 > 0 \Rightarrow$ TP bei $x = 6$

y-Wert: Einsetzen von $x = 6$ in $k_v(x)$ $\quad k_v(6) = 5 \cdot 6^2 - 60 \cdot 6 + 250 = 70$ $\quad TP(6 \mid 70)$

Ökonomische Bedeutung

TP von $k_v(x)$: $(6|70)$

Die Produktionsmenge $x=6$ nennt man Betriebsminimum. Das ist die Menge, bei der die variablen Stückkosten mit 70 GE/ME minimal sind.

Gesamtkosten für $x=6$: $K(6) = 5\cdot 6^3 - 60\cdot 6^2 + 250\cdot 6 + 200 = 620$

Verkauft man 6 ME zu 70 GE/ME, so betragen die Erlöse $6\cdot 70 = 420$ GE.

Die Verluste entsprechen in diesem Fall 200 GE und damit genau den Fixkosten.

Zusammenfassung: Produziert man das Betriebsminimum $(x=6)$ und verkauft zu den entsprechenden variablen Stückkosten (kurzfristige Preisuntergrenze) $(p=70)$ so deckt man genau die variablen (Stück)kosten durch Erlöse und macht Verluste in Höhe der Fixkosten.